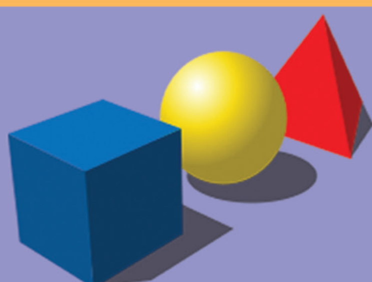
গণিত

K5S3V9

অষ্টম শ্রেণির জন্য



প্রাথমিক শিক্ষা বিভাগ

অসম সরকার

বন্যার জন্য প্রস্তুতি

বন্যা

বন্যার আগে

নীচে উল্লেখিত সামগ্রীগুলি জোগাড় করে জরুরিকালীন ব্যাগটি (Emergency Kit) প্রস্তুত রাখো।

● সর্পদংশন ও ডায়েরিয়ার জন্য অতিরিক্ত ওষুধপত্রসহ একটি প্রাথমিক চিকিৎসা বাক্স ● জিনিসপত্র বাঁধার জন্য শক্ত দড়ি ● বিশুদ্ধ পানীয় জল, শুকনো খাবার, লবণ ও চিনি ● একটি রেডিও, টর্চলাইট ও অতিরিক্ত ব্যাটারি ● কাপোড়চোপড় ও দরকারি সামগ্রী রাখার জন্য , জলে ভেজে না এমন, থলে বা ব্যাগ। এছাড়াও ছাতা ও বাঁশের লাঠি।

বন্যার সময়

● জরুরিকালীন ব্যাগ সঙ্গে নিয়ে নিরাপদ স্থানে যেতে হয়। ● বিছানা অথবা টেবিলের ওপর ঘরোয়া দরকারি সামগ্রীগুলি উঠিয়ে রাখতে হয় ● জল ফুটিয়ে খেতে হয় ● বিপদসংকুল স্থানে যাওয়া উচিত নয়।

বন্যার পরে

● চারদিকে জীবাণুনাশক ব্লিচিং পাউডার ও চুন ছেটোতে হয়।

● যতক্ষণ পর্যন্ত সরকারের তরফ থেকে নিরাপদমূলক ঘোষণা না হয় ততক্ষণ অবধি বাইরে বের হওয়া উচিত নয়। ● বৈদ্যুতিক সামগ্রীগুলি ব্যবহার করার আগে ভালোমতো শুকিয়ে নেওয়া উচিত।

জনকল্যাণ ও নিরাপত্তার খাতিরে প্রকাশিত : অসম রাজ্য দুর্যোগ ব্যবস্থাপনা প্রাধিকারী (এ এস ডি এম এ)

বিশেষভাবে সক্ষম ছাত্র-ছাত্রীর অন্তর্ভুক্তির জন্য

- বিশেষভাবে সক্ষম ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য শিক্ষক-শিক্ষয়িত্রীরা পঠন পাঠন প্রক্রিয়ায় বিশেষ ব্যবস্থা গ্রহণ করবেন।

‘তুমি যখনই নিজেকে অসহায় মনে করবে অথবা আশেপাশের কোনো শিশুকে (০-১৮ বছর পর্যন্ত) অসহায় কিংবা বিপদগ্রস্ত অবস্থায় দেখবে, তখনই চাইল্ড লাইনের এই ‘১০৯৮’ (বিনামূল্য) নম্বরে সহযোগিতার জন্য ফোন করবে।

গণিত

অষ্টম শ্রেণির জন্য

K5S3V9

প্রস্তুতকরণ

রাজ্য শিক্ষা-গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পরিষদ, অসম

কাহিলিপাড়া, গুয়াহাটি-১৯

নাম :..

বিদ্যালয়ের নাম :...

শ্রেণি : .... রোল নং :..................

অসম রাজ্য পাঠ্যপুথি প্রণয়ন ও প্রকাশন নিগম লিমিটেড, গুয়াহাটি

GANIT : Aastham srenir Janya : A Mathematics textbook in Bengali medium for class-VIII developed by SCERT, Assam and approved by the Government of Assam vide letter.No....... dated Dispur the .... and Published by the Assam State Textbook Production and Publication Corporation Limited, Guwahati.

FREE TEXTBOOK

প্রথম প্রকাশ ঃ ২০২০

ঃ অসম সরকারের অর্থ সাহায্যে বিনামূল্যে বিতড়ণের উদ্দেশ্যে প্রকাশিত পাঠ্যপুথি

প্রকাশক ঃ অসম রাজ্য পাঠ্যপুথি প্রণয়ন ও প্রকাশন নিগম লিমিটেড, গুয়াহাটি

মুদ্রক ঃ

ডাঃ ৰনোজ পেগু, এম.বি.বি.এস
মন্ত্রী, অসম

সত্যমেব জয়তে

শিক্ষা, সমতল উপজাতি এবং অনগ্রসর শ্রেণি কল্যাণ বিভাগ

শুভেচ্ছাবাণী...

বিদ্যায়তনিক শিক্ষার প্রধান উপকরণ হলো পাঠ্যপুস্তক। পাঠ্যপুস্তকের মাধ্যমেই ছাত্র-ছাত্রীরা জ্ঞানান্বেষণ করে। ছাত্র-ছাত্রীরা আমাদের দেশের ভবিষ্যতের মূল সম্বল। মানব সভ্যতার ধারা শিক্ষার দ্বারাই প্রভাবান্বিত হয়। আর এই কথা উপলব্ধি করেই বর্তমান সরকার শিক্ষার ক্ষেত্রে অধিক গুরুত্ব আরোপ করেছে।

বর্তমান রাজ্য সরকার শিক্ষাগ্রহণের ক্ষেত্রে ছাত্র-ছাত্রীরা সফলতা অর্জন করে জীবনের লক্ষ্য পূরণ তথা রাজ্যের কল্যাণ সাধনে যাতে অগ্রসর হয়, এ জন্য বিভিন্ন অভিলাষী প্রকল্প রূপায়ণ করে চলেছে। ‘প্রজ্ঞান ভারতী’র অধীনে ‘ক’ শ্রেণি থেকে দ্বাদশ শ্রেণি পর্যন্ত ছাত্র-ছাত্রীদের বিনামূল্যের পাঠ্যপুস্তক বিতরণ করে আসছে। ২০২০বর্ষ থেকে আমাদের সরকার স্নাতক পর্যায়ের শ্রেণি পর্যন্ত এই প্রকল্পটিকে সম্প্রসারিত করে আসছে। সমগ্র রাজ্যে উচ্চতর মাধ্যমিক এবং স্নাতক পর্যায়ের শ্রেণিতে ভর্তির মাশুল মকুব করার ঘোষণার মাধ্যমে ইতিবাচক পদক্ষেপ গ্রহণ করে আসছে। সমাজের আর্থিকভাবে অনগ্রসর পরিবারের শিক্ষার্থীদের হাইস্কুল শিক্ষান্ত এবং উচ্চতর মাধ্যমিক পরীক্ষার মাশুল মকুব করার ব্যবস্থা করা হয়েছে। এর পাশাপাশি মাধ্যমিক পর্যায়ের ছাত্র-ছাত্রীদের ইউনিফর্ম বিতরণের জন্য সরকার ব্যবস্থা গ্রহণ করেছে। ‘আনন্দরাম বরুয়া প্রকল্পর মাধ্যমে হাইস্কুল শিক্ষান্ত পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হওয়া ছাত্র-ছাত্রীদের ল্যাপটপ বা তার বিনিময়ে আর্থিক অনুদান প্রদান করা হয়েছে।

ছাত্র-ছাত্রীদের শিক্ষাগ্রহণের পথ মসৃণ করার মহান উদ্দেশ্যকে সামনে রেখে রূপায়িত ‘প্রজ্ঞান ভারতী’ প্রকল্পের অন্তর্গত বিনামূল্যের পাঠ্যপুস্তক বিতরণের এই পবিত্র কর্মযজ্ঞে অবদানের জন্য আমি রাজ্য শিক্ষা-গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পরিষদ, অসম মাধ্যমিক শিক্ষা পরিষদ, অসম উচ্চতর মাধ্যমিক শিক্ষা সংসদ, অসম রাজ্যিক পাঠ্যপুস্তক প্রণয়ন এবং প্রকাশন নিগমের কর্ম-তৎপরতার প্রশংসা করছি। শিক্ষার্থীরা নিরলস জ্ঞান আহরণের যজ্ঞে আত্মনিয়োগ করে রাষ্ট্রের সম্পদ হিসাবে নিজেদের গড়ে তুলতে সক্ষম হবে বলে আশা প্রকাশ করে আমি আন্তরিক শুভেচ্ছা জ্ঞাপন করছি।

(ডাঃ ৰনোজ পেগু)
শিক্ষামন্ত্রী, অসম

প্রাককথন

১৯৮৬ সালের রাষ্ট্রীয় শিক্ষানীতিতে উল্লিখিত শিক্ষাকেন্দ্রিক শিক্ষা পদ্ধতির সফল রূপায়ণ ও প্রাথমিক শিক্ষাকে সার্বজনীন করার ক্ষেত্রে স্কুলগুলোতে পাঠ্যপুথির এক গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রয়েছে। সেই উদ্দেশ্যেই রাজ্য শিক্ষা-গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পরিষদ, অসম, অসম সরকারের নির্দেশ অনুযায়ী প্রয়োজন সাপেক্ষে প্রাথমিক স্তরের পাঠ্যপুথিগুলোর প্রস্তুত ও পুনরীক্ষণ করে আসছে। বর্তমানে অসম সরকারের নির্দেশ মতে প্রাথমিক বিদ্যালয়ের অষ্টম শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য 'গণিত' পাঠ্যপুস্তকটি প্রস্তুত করা হয়েছে যাতে ২০২০ সালের শিক্ষাবর্ষ থেকে সেটা পঠন পাঠন প্রক্রিয়ায় কার্যকরী হতে পারে। এই পুস্তকটি 'রাষ্ট্রীয় কারিকুলাম রূপরেখা, ২০০৫'-এর আদলে প্রাথমিক পর্যায়ের জন্য প্রস্তুত করা রাজ্য পাঠ্যক্রম ও রাষ্ট্রীয় শিক্ষা অনুসন্ধান ও প্রশিক্ষণ পরিষদ, নয়া দিল্লির দ্বারা প্রস্তুত করা 'শিক্ষালাভের ফলাফল' (Learning Outcome)-এর ভিত্তিতে প্রস্তুত করা হয়েছে।

গণিতের প্রাথমিক ধারণাগুলো আয়ত্ব করার ক্ষেত্রে শিশুরা যাতে সক্রিয়ভাবে অংশগ্রহণ করতে পারে তার প্রতি লক্ষ রেখে এই পাঠ্যপুস্তকটিতে পরিবেশ ভিত্তিক কার্যকলাপ সন্নিবিষ্ট করা হয়েছে। পাঠ্যপুস্তকের পাঠসমূহ চর্চার সময় শিক্ষকরা যথাসম্ভব বাস্তব বস্তু ও সামগ্রীর সাহায্যে পঠন পাঠন প্রক্রিয়া আনন্দদায়ক ও আকর্ষণীয় করে তুলবেন বলে আশা রাখছি।

পাঠ্যপুস্তকটি প্রস্তুত করার ক্ষেত্রে বিভিন্ন অধ্যাপক, বিষয় বিশেষজ্ঞ, শিক্ষক-প্রশিক্ষক, শিক্ষক-শিক্ষয়িত্রী ও পুনরীক্ষকের প্রতি কৃতজ্ঞতা জানাই। সেই সঙ্গে অসম গণিত শিক্ষায়তনের সভাপতি, সম্পাদক ও এই পুস্তকটির সঙ্গে জড়িত অন্যান্য সকল কর্মকর্তাদের তাঁদের সহায় ও সহযোগিতার জন্য ধন্যবাদ জানাই।

শুভকাঙ্ক্ষী সকলের শুভকামনা ও পরামর্শ পরবর্তী কালে পুস্তকটির সংশোধন-সংযোজনের ক্ষেত্রে অবদান রাখবে বলে আশা রাখছি।

নিরদা দেবী
(ড° নিরদা দেবী)

সঞ্চালক

রাজ্য শিক্ষা-গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পরিষদ, অসম

কাহিলিপাড়া, গুয়াহাটি-৭৮১০১৯

ডিজিটেল বিষয়বস্তু উপলব্ধ করতে কিভাবে QR Code ব্যবহার করবেন?

আপনার মোবাইল ব্রাউজারে diksha.gov.in/app type করুন এবং install button স্পর্শ করুন।

OR

Google Play Store এ DIKSHA search করুন এবং Appটি ডাউনলোড করতে Install Buttonটি স্পর্শ করুন

মোবাইলে QR কোড ব্যবহার করে কিভাবে ডিজিটাল বিষয়বস্তু লাভ করবেন ?

1. অগ্রাধিকার যে ভাষাকে দেওয়া হয়েছে সেটি নির্বাচন করুন।
2. আপনার ভূমিকা বেছে নিন- ছাত্র/ শিক্ষক / অন্য
3. পাঠ্যপুস্তকে থাকা QR কোড স্ক্যান করার জন্য QR কোডের আইকনটি টিপুন।
4. প্রবেশ অনুমোদন করুন এবং এ্যাপ ব্যবহারের অনুমতি দিন।
5. পাঠ্যপুস্তকের QR কোডের মাঝখানে মোবাইল ফোনটিকে স্থিরভাবে কিছুক্ষন ধরে থাকুন।
6. scan সফল হলে QR কোড সম্পর্কীয় বিষয়বস্তুর তালিকা লাভ করবেন।

ডেস্কটপে QR কোড ব্যবহার করে কিভাবে ডিজিটেল বিষয়বস্তু লাভ করবেন ?

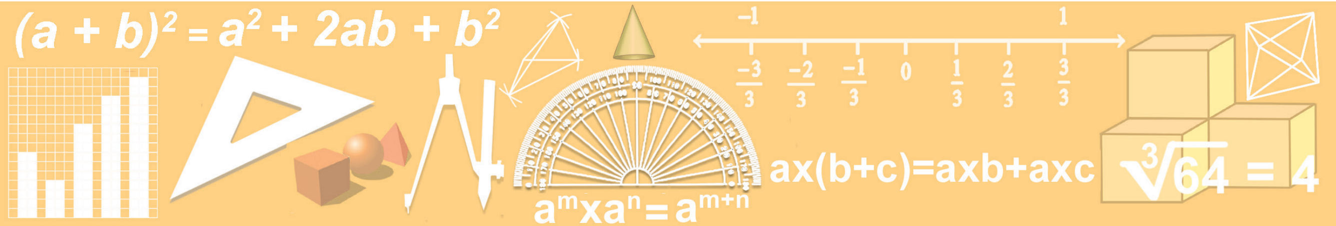
1. QR কোডের নীচেয় ছয় অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা (ডায়েল কোড) দেখবেন।
2. আপনার ব্রাউজারে diksha.gov.in/as/get লিখুন।
3. ছয় অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যাটি (ডায়েল কোড) সার্চবারে লিখুন ।
4. উপলব্ধ বিষয়বস্তু তালিকা দেখে যে কোনো নতুন বিষয়বস্তুতে ক্লিক করুন।

সূচিপত্ৰ

—ঃ অষ্টম শ্রেণির গণিতের শিক্ষালাভের ফলাফল ঃ—

ছাত্র-ছাত্রীরা

- নির্দিষ্ট ধারণার সাহায্যে পরিমেয় সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ সম্বন্ধীয় ধর্মগুলো বুঝতে পারবে।
- দুটি পরিমেয় সংখ্যার মধ্যে অবস্থিত পরিমাণ সংখ্যাগুলো বের করতে শিখবে।
- 2, 3, 4, 5, 6, 9 এবং 11র বিভাজ্য নিয়মগুলি প্রমাণ করে দেখতে শিখবে।
- বিভিন্ন পদ্ধতির দ্বারা সংখ্যার বর্গ, ঘন, বর্গমূল ও ঘনমূল নির্ণয় করতে শিখবে।
- সূচকীয় রূপে থাকা সমস্যাগুলো সমাধান করতে জানবে।
- চলক ব্যবহার করে পাজল (puzzles) ও দৈনন্দিন জীবনের সমস্যাগুলো সমাধান করতে শিখবে।
- বীজগাণিতিক রাশিগুলি গুণ করতে শিখবে। উদাহরণস্বরূপ, $(2x - 5)$ $(3x^2 + 7)$ কে বিস্তার করতে শিখবে।
- দৈনন্দিন জীবনের বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে বিভিন্ন বীজগাণিতিক অভেদগুলো ব্যবহার করতে শিখবে।
- রেহাই মূল্য, চক্রবৃদ্ধি সুদ, লাভ-লোকসান ইত্যাদি সম্বন্ধীয় সমস্যাগুলোতে শতাংশের ধারণা প্রয়োগ করতে শিখবে। উদাহরণস্বরূপ, যখন একটি বস্তুর চিহ্নিত মূল্য ও প্রকৃত রেহাই মূল্য দেওয়া থাকে তখন শতকরা রেহাই নির্ণয় করতে বা একটি লেনদেনের যখন ক্রয়মূল্য ও লাভ দেওয়া থাকে তখন শতকরা লাভ নির্ণয় করতে শতাংশের ধারণা প্রয়োগ করতে পারি।
- প্রত্যক্ষ ও ব্যস্ত সমানুপাতের সমস্যাগুলো সমাধান করতে পারবে।
- কোণের ধর্ম ব্যবহার করে একটি চতুর্ভুজের কোণ সম্বন্ধীয় সমস্যাগুলো সমাধান করতে পারবে।
- সামান্তরিকের বিভিন্ন ধর্মগুলো পরীক্ষা করে সত্যাসত্য বিচার করতে জানবে ও যুক্তির সাহায্যে এসবের মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা করতে শিখবে।
- ত্রিমাত্রিক আকৃতিসমূহ একটি সমতল পৃষ্ঠে, যেমন একটি কাগজ বা ব্ল্যাকবোর্ডে দেখাতে পারবে।
- নকশার সাহায্যে ইউলারের সম্বন্ধ (Euler's relation) টি প্রমাণ করে দেখতে শিখবে।
- কম্পাস ও সোজা দাগ কেটে বিভিন্ন ধরণের চতুর্ভুজ আঁকতে শিখবে।
- ট্র্যাপিজিয়াম ও অন্য বহুভুজ আকৃতিগুলির কালি ছক কাগজের সাহায্যে বের করতে পারবে এবং সূত্রের সাহায্যে সত্যাসত্য নিরূপণ করতে পারবে।
- বহুভুজের কালি নির্ণয় করতে পারবে।
- আয়তীয় ঘনক ও সিলিন্ডার জাতীয় বস্তুর পৃষ্ঠভাগের কালি ও আয়তন নির্ণয় করতে শিখবে।
- দণ্ডচিত্র ও পাইচিত্র সম্পর্কে জানবে।
- পূর্বের তথ্য বা পূর্বে ঘটা ঘটনার ভিত্তিতে, যেমন, ডাইস ও মুদ্রা বার বার ছুড়ে সম্ভাব্য ঘটনার ওপর একটি আনুমানিক সিদ্ধান্ত নিতে শিখবে।



অধ্যায়-1

পরিমেয় সংখ্যা
(Rational Numbers)

P6I4C2

1.1 অমর, অরুণ ও আমির মিলিমিশে একসঙ্গে নিজেদের বাড়ির বাজার করে। এভাবে একসঙ্গে বাজার করলে পাইকারি মূল্যে জিনিস কেনা যায়। এতে যা খরচ হয় সেটা পরে সমান সমান ভাগ করে নেয়। এবার বাজার করার সময় ওরা 3টি লাউ 65 টাকায়, তিনজোড়া ডিম 60 টাকায় ও এক ডজন কলা 55 টাকায় কিনল। তারা জনপ্রতি হিসাব করে বের করল, লাউ কিনতে টাকা $\frac{65}{3}$, ডিম প্রতিজোড়া 20 টাকা এবং কলায় $\frac{55}{3}$ টাকা করে পড়েছে।

অন্য একটি উদাহরণ দেখি এসো।

শ্রীনগরে এক সপ্তাহে নিম্নতম উষ্ণতা ছিল —

$-7^oC, -4^oC, -1^oC, -5^oC, -8^oC, -10^oC, -6^oC$

অতএব, সপ্তাহটির গড় তাপমাত্রা হবে—

$$\frac{(-7^0C)+(-4^0C)+(-1^0C)+(-5^0C)+(-8^0C)+(-10^0C)+(-6^0C)}{7}$$

$$=\frac{-(7^0C+4^0C+1^0C+5^0C+8^0C+10^0C+6^0C)}{7}$$

$$=\frac{-41^0C}{7}$$

এবার তোমাদের মনে প্রশ্ন জেগেছে নিশ্চয় যে, $\frac{65}{3}, \frac{55}{3}, \frac{-41}{7}$ সংখ্যাগুলো কী সংখ্যা? স্বাভাবিক সংখ্যা, পূর্ণ সংখ্যা, অখণ্ড সংখ্যা, নাকি ভিন্ন কোনো সংখ্যা?

এসো এবার আমরা এরকম সংখ্যার বিষয়ে আলোচনা করি। উপরের সংখ্যাগুলোর 65, 55 ,–41, 3, 7

একেকটি অখণ্ড সংখ্যা। আমরা যদি দুটি অখণ্ড সংখ্যাকে p ও q দ্বারা চিহ্নিত করি তবে $\frac{65}{3}$, $\frac{55}{3}$ এবং $\frac{-41}{7}$ প্রতিটি সংখ্যাই $\frac{p}{q}$ ধরণের। তাই না? $\frac{50}{3}$ তে $p = 50, q = 3$, $\frac{-41}{7}$ তে $p = -41, q = 7$ ইত্যাদি। এক্ষেত্রে একটি কথা গুরুত্বপূর্ণ যে যদিও p এবং q অখণ্ড সংখ্যা, কিন্তু q কখনো 0 হতে পরে না, কারণ 0 দিয়ে ভাগ সংজ্ঞাবদ্ধ নয়। ফলে,

যে সব সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ এভাবে লেখা যায়, যেখানে p ও q অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$, সেইসব সংখ্যাগুলোকে 'পরিমেয় সংখ্যা' (Rational Number) বলে।

যেমন— $\frac{3}{4}, \frac{11}{-8}, \frac{-19}{6}, \frac{235}{1106}, \frac{-51}{193}$ ইত্যাদি।

কার্য (Activity) — তোমরা সবাই 5 টা করে পরিমেয় সংখ্যার উদাহরণ লিখে শিক্ষক-শিক্ষয়িত্রীকে দেখাও।

জেনে রাখা দরকার (Let us know) সব অখণ্ড সংখ্যাকে আমরা $\frac{p}{q}$ এইভাবে লিখতে পারি। যেমন—

$$6 = \frac{12}{2} \text{ বা } \frac{30}{5} \text{ বা } \frac{72}{12}$$

$$-8 = \frac{-24}{3} \text{ বা } \frac{-48}{6} \text{ বা } \frac{-56}{7}$$

$$0 = \frac{0}{17} \text{ বা } \frac{0}{21} \text{ ইত্যাদি।}$$

অতএব **সকল অখণ্ড সংখ্যাই পরিমেয় সংখ্যা।**

সঙ্গীদের সঙ্গে আলোচনা করো (Discus in group) ঃ প্রয়োজন সাপেক্ষে উদাহরণ দেবে।

(i) সকল পরিমেয় সংখ্যাই অখণ্ড সংখ্যা হবে কি?
(ii) সকল স্বাভাবিক সংখ্যাই পরিমেয় সংখ্যা হবে কি?
(iii) সকল পরিমেয় সংখ্যাই স্বাভাবিক সংখ্যা হবে কি?
(iv) পূর্ণ সংখ্যাগুলো কি তবে পরিমেয় সংখ্যা?

তোমরা ইতিমধ্যে পেয়েছ যে দশমিক সংখ্যাগুলোকে ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে পারি। যেমন —

$0.7 = \frac{7}{10}$, $0.93 = \frac{93}{100}$, $-2.367 = \frac{-2367}{1000}$ ইত্যাদি।

অর্থাৎ দশমিক বিন্দুর সীমিত স্থান পর্যন্ত প্রসারিত করতে পারে এমন সংখ্যাগুলোকে $\frac{p}{q}$ এই রীতিতে প্রকাশ করতে পারি। কিন্তু পৌনঃপুনিক দশমিক সংখ্যাগুলিকেও $\frac{p}{q}$ রীতিতে প্রকাশ করতে পারি। যেমন—

$$0.33333\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{3}$$

$$0.142857142857\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{7} \text{ ইত্যাদি।}$$

অতএব অসীম পর্যন্ত বিস্তারিত পৌনঃপুনিক দশমিক সংখ্যাগুলিও পরিমেয় সংখ্যা। অন্যদিকে এমন কিছু সংখ্যা আছে যেখানে দশমিকের পরবর্তী সংখ্যাগুলো অসীম পর্যন্ত বিস্তারিত হয়, কিন্তু পৌনঃপুনিক নয় (non-terminating, non-repeating decimal)। এধরণের সংখ্যাগুলোকে $\frac{p}{q}$ রীতিতে প্রকাশ করা যায় না। ফলে এই সংখ্যাগুলি পরিমেয় নয়। যেমন— 0.319782714......., 3.14976108....., 0.101100111000.... ইত্যাদি।

ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পরিমেয় সংখ্যা (Positive and Negative Rational Numbers)ঃ

একটি পরিমেয় সংখ্যা $\frac{p}{q}$ এর $(q \neq 0)$ যদি p ও q দুটোই ধনাত্মক কিংবা দুটোই ঋণাত্মক, তবে সংখ্যাটিকে **ধনাত্মক পরিমেয় সংখ্যা (Positive Rational Number)** বলে।

যেমন— $\frac{8}{9}, \frac{7}{12}, \frac{-9}{-11}$ ইত্যাদি, কারণ —

$$\frac{-9}{-11} = \frac{(-1)\times(-9)}{(-1)\times(-11)} = \frac{9}{11}$$

অন্যদিকে, পরিমেয় সংখ্যা $\frac{p}{q}$ এর $(q \neq 0)$ যদি p বা qএর যেকোনো একটি ঋণাত্মক ও অন্যটি ধনাত্মক হয় তবে $\frac{p}{q}$ কে একটি **ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা (Negative Rational Number)** বলে।

যেমন $\frac{-7}{8}, \frac{8}{-9}, \frac{-11}{236}$ ইত্যাদি।

একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হচ্ছে যে **পরিমেয় সংখ্যার ক্ষেত্রে হরটি আমরা ঋণাত্মক রাখি না**। যেমন —

$$\frac{8}{-9} = \frac{(-1)\times 8}{(-1)\times(-9)} = \frac{-8}{9}$$

$$\frac{13}{-219} = \frac{(-1)\times 13}{(-1)\times(-219)} = \frac{-13}{219} \text{ ইত্যাদি।}$$

1.2 পরিমেয় সংখ্যার বিধি (Properties of Rational Numbers) :

তোমরা ইতিপূর্বে অখণ্ড সংখ্যার মৌলিক প্রক্রিয়াগুলো এবং সেগুলির নিয়মগুলো পেয়েছে। এবার পরিমেয় সংখ্যার ক্ষেত্রে যে সব নিয়ম রয়েছে সে বিষয়ে আলোচনা করি এসো।

1.2.1 আবদ্ধতা বিধি (Closure Property)

(i) যোগের ক্ষেত্রে (Closure Property Under Addition) :

$\frac{2}{5}$ ও $\frac{-1}{5}$ দুটি পরিমেয় সংখ্যা নেওয়া হল।

এই দুটি সংখ্যা যোগ করায় $\frac{2}{5}+(\frac{-1}{5})=\frac{2+(-1)}{5}=\frac{1}{5}$, এই পরিমেয় সংখ্যা পেলাম।

একইভাবে, 6 এবং 4 পরিমেয় সংখ্যা দুটি যোগ করে দেখা গেল যে $6 + 4 = 10$ একটি পরিমেয় সংখ্যা। আবার (-9) ও (-5) পরিমেয় সংখ্যা দুটির ক্ষেত্রে $(-9)+(-5)=-14$ একটি পরিমেয় সংখ্যা পাওয়া গেল।

অতএব দেখা যাচ্ছে **দুটি পরিমেয় সংখ্যার যোগফল সর্বদা একটি পরিমেয় সংখ্যাই**।

আমরা এভাগে বলতে পারি যে, a ও b যেকোনো দুটি পরিমেয় সংখ্যা হলে $(a + b)$ ও একটি পরিমেয় সংখ্যা হয়।

যেহেতু আমরা দুটো পরিমেয় সংখ্যাকে যোগ করে অন্য একটি পরিমেয় সংখ্যা পাই, অতএব বলা যায় যে পরিমেয় সংখ্যাগুলো যোগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে আবদ্ধ। পরিমেয় সংখ্যার এই গুলোটিকে আমরা যোগ সাপেক্ষে আবদ্ধতার বিধি বলব।

কার্য নীচের সংখ্যাগুলোর যোগফলগুলি আবদ্ধবিধি মেনে চলে কি না, নিজে বের করো—

(a) $\frac{2}{3}, 6$ (b) $\frac{1}{8}, \frac{3}{4}$ (c) $-\frac{2}{7}, \frac{3}{4}$ (c) $\frac{-1}{7}$, $\frac{-1}{3}$

(ii) বিয়োগের ক্ষেত্রে (Closure Property Under Subtraction) :

বিয়োগের ক্ষেত্রে আবদ্ধ বিধি মেনে চলে কি না উদাহরণের মাধ্যমে করি এসো—

পরিমেয় সংখ্যা $\frac{3}{7}$ থেকে $\frac{-2}{5}$ পরিমেয় সংখ্যাটি বিয়োগ করলে $\frac{3}{7}-(\frac{-2}{5})=\frac{15+14}{35}=\frac{29}{35}$ একটি পরিমেয় সংখ্যাটি পাওয়া যায়।

একইভাবে $16 - 14 = 2$, এটা পরিমেয় সংখ্যা।

$14 - 19 = -5$, এটা পরিমেয় সংখ্যা।

আবার, $(-2)-\frac{5}{6} = \frac{-2\times 6-5}{6}$

$=\frac{-12-5}{6}=\frac{-17}{6}$ এটা পরিমেয় সংখ্যা, ইত্যাদি

প্রতিটি ক্ষেত্রে আমরা একটি পরিমেয় সংখ্যা পেলাম।

তোমরা ভিন্ন পরিমেয় সংখ্যা নিয়েও একইভাবে করে দেখতে পার।

$\therefore$ আমরা বলতে পারি যে **দুটো পরিমেয় সংখ্যার বিয়োগফল একটি পরিমেয় সংখ্যা**।

অর্থাৎ a ও b দুটি পরিমেয় সংখ্যা হলে $(a - b)$ ও একটি পরিমেয় সংখ্যা।

অতএব পরিমেয় সংখ্যাগুলো বিয়োগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে আবদ্ধ।

কার্য নীচের সংখ্যাগুলো বিয়োগ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে আবদ্ধ কি ?

(a) $-6, -9$ (b) $3, \frac{-11}{7}$ (c) $\frac{-1}{4}, \frac{1}{3}$ (d) $\frac{-1}{3}, \frac{-1}{2}$

(iii) গুণের ক্ষেত্রে (Closure Property Under Multiplications) :

এবার গুণের ক্ষেত্রে কি হয় দেখা যাক —

$\frac{2}{7}$ ও $\frac{-11}{5}$ দুটি পরিমেয় সংখ্যা নেওয়া হল।

এবার $\frac{2}{7}\times\frac{-11}{5}=\frac{2\times(-11)}{7\times5}=\frac{-22}{35}$, একটি পরিমেয় সংখ্যা পেলাম।

ঠিক একই ভাবে

$(-2) \times 0 = 0$ একটি পরিমেয় সংখ্যা।

$11 \times 11 = 121$ পরিমেয় সংখ্যা ইত্যাদি।

প্রতিবার দুটি পরিমেয় সংখ্যা গুণ করে পরিমেয় সংখ্যাই পেলাম।

তোমরাও এভাবে অন্য পরিমেয় সংখ্যা নিয়ে দেখতে পারো।

অতএব **দুটি পরিমেয় সংখ্যার গুণফল একটি পরিমেয় সংখ্যা।**

এ ক্ষেত্রে বলতে পারি যে a ও b পরিমেয় সংখ্যা হলে $(a \times b)$ ও একটি পরিমেয় সংখ্যা হবে।

ফলে **পরিমেয় সংখ্যাগুলি গুণের ক্ষেত্রে আবদ্ধ।**

কার্য নীচের সংখ্যাগুলো গুণ সাপেক্ষে আবদ্ধ কি ?

(a) $-5, -11$ (b) $13, \frac{-11}{7}$ (c) $\frac{-1}{4}, \frac{4}{5}$ (d) $\frac{-14}{3}, \frac{-15}{7}$

(iv) ভাগের ক্ষেত্রে (Closure Property Under Division) ঃ

$\frac{2}{6}\div\frac{1}{2}=\frac{2}{6}\times\frac{2}{1}=\frac{4}{6}$ একটি পরিমেয় সংখ্যা।

$(-4) \div (-2) = 2$ এটাও পরিমেয় সংখ্যা।

$\frac{0}{2} = 0$, এটাও পরিমেয় সংখ্যা।

কিন্তু $6 \div 0$ অর্থহীন

দেখা গেল দুটি পরিমেয় সংখ্যার ভাগফল সর্বদা একটি পরিমেয় সংখ্যা নাও হতে পারে। অর্থাৎ a ও b দুটি পরিমেয় সংখ্যা হলে $(a \div b)$ পরিমেয় সংখ্যা নাও হতে পারে।

তাই পরিমেয় সংখ্যাগুলো ভাগের ক্ষেত্রে আবদ্ধ নয়।

কিন্তু **শূন্যকে বাদ দিয়ে পরিমেয় সংখ্যাগুলো ভাগের ক্ষেত্রে আবদ্ধ।**

কার্য নীচের সংখ্যাগুলো ভাগের ক্ষেত্রে আবদ্ধ কি না করে দেখো—

(a) 4 , 16 (b) – 49, 7 (c) $-\frac{2}{7}, \frac{3}{4}$ (d) $-\frac{1}{8}, -\frac{1}{7}$

1.2.2 ক্রম বিনিময় বিধি (Commutative Property)

এই বিধির ক্ষেত্রেও আমরা কতগুলি উদাহরণ পরীক্ষা করব।

(i) যোগের ক্ষেত্রে (Commutative Property Under Addition) ঃ

$\frac{3}{5}$ এবং $(\frac{-2}{7})$ পরিমেয় সংখ্যা দুটি নিয়ে যোগ করে $\frac{3}{5}+(\frac{-2}{7})=\frac{21-10}{35}=\frac{11}{35}$ পেলাম।

একই ভাবে $\frac{-2}{7}+\frac{3}{5}=\frac{-2\times5}{7\times5}+\frac{3\times7}{5\times7}=\frac{-10+21}{35}=\frac{11}{35}$

$\therefore$ দেখা গেল $\frac{3}{5}+\frac{(-2)}{7}=\frac{(-2)}{7}+\frac{3}{5}$

একই ভাবে 3 + 2 = 5 = 2 + 3

(– 6) + (– 5) = – 11 = (– 5) + (– 6)

তোমরা ভিন্ন পরিমেয় সংখ্যা নিয়েও করে দেখতে পারো। কী পেলে?

দেখা গেল যে দুটি পরিমেয় সংখ্যা যেকোনো ক্রমে যোগ করি না কেন, যোগফল একই হবে।

অতএব, আমরা এভাবে বলতে পারি যে,

a ও b যেকোনো দুটি পরিমেয় সংখ্যা হলে $a + b = b + a$

অর্থাৎ **পরিমেয় সংখ্যাগুলে যোগ সাপেক্ষে ক্রম বিনিময় বিধি মেনে চলে।**

কার্য নীচের সংখ্যাগুলো যোগের ক্ষেত্রে ক্রম বিনিময় বিধি মেনে চলে কি না করে দেখো—

(a) 26, 37 (b) – 48, – 17 (c) $\frac{12}{7}, 0$

(ii) বিয়োগের ক্ষেত্রে (Commutative Property Under Subtraction) ঃ

যোগের মতো দুটি পরিমেয় সংখ্যা যেকোনো ক্রমে বিয়োগ করি চলো—

$$\frac{2}{3}-\frac{7}{4}=\frac{8-21}{12}=\frac{-13}{12}$$

$$\frac{7}{4}-\frac{2}{3}=\frac{21-8}{12}=\frac{13}{12}$$

$$\therefore \frac{2}{3}-\frac{7}{4}\neq\frac{7}{4}-\frac{2}{3}$$

অন্য দুটো পৰিমেয় সংখ্যা বিয়োগ করে দেখি এসো—

$4 - 3 = 1$
$3 - 4 = -1$
$\therefore 4 - 3 \neq 3 - 4$

দেখা যাচ্ছে যে পরিমেয় সংখ্যাগুলো যে কোনো ক্রমে বিয়োগ করলে বিয়োগফল সমান হয় না।
ফলে a এবং b যেকোনো দুটো পরিমেয় সংখ্যা হলে $a - b \neq b - a$
অর্থাৎ **পরিমেয় সংখ্যাগুলো বিয়োগের ক্ষেত্রে ক্রম বিনিময় বিধি মেনে চলে না।**

কার্য নীচের সংখ্যাগুলো বিয়োগের ক্ষেত্রে ক্রম বিনিময় বিধি মেনে চলে কি না করে দেখো—

(a) $-3, -6$ (b) $-15, 15$ (c) $\frac{1}{4}, \frac{3}{5}$

(iii) গুণের ক্ষেত্রে (Commutative Property Under Multiplication) ঃ

গুণের ক্ষেত্রে ক্রম বিনিময় বিধি মেনে চলে কি না কয়েকটি উদাহরণ সহকারে দেখা যেতে পারে—

$2\times 0 = 0 = 0\times 2$
$3\times(-2) = -6 = (-2)\times 3$

একই ভাবে, $\frac{2}{3}\times\left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{-10}{21}$

$\left(\frac{-5}{7}\right)\times\frac{2}{3} = \frac{-10}{21}$

$\therefore \frac{2}{3}\times\left(\frac{-5}{7}\right) = \left(\frac{-5}{7}\right)\times\frac{2}{3}$

অতএব দেখা গেল যে দুটো পরিমেয় সংখ্যা যেকোনো ক্রমে গুণ করলে গুণফল সমান হয়।
অর্থাৎ, এভাবেও বলা যেতে পারে যে গুণের ক্ষেত্রে a এবং b যেকোনো দুটি পরিমেয় সংখ্যা হলে
$a\times b = b\times a$

ফলে, **গুণের ক্ষেত্রে পরিমেয় সংখ্যাগুলি ক্রম বিনিময় বিধি মেনে চলে।**

কার্য নীচের সংখ্যাগুলো গুণের ক্ষেত্রে ক্রম বিনিময় বিধি মেনে চলে কি না দেখো—

(a) $4, -7$ (b) $-5, -9$ (c) $\frac{5}{3}, 1$ (d) $\frac{3}{7}, \frac{-4}{5}$

(iv) ভাগের ক্ষেত্রে (Commutative Property Under Division) ঃ

এই ক্ষেত্রে দুটি পরিমেয় সংখ্যা একটি অন্যটিকে যেকোনো ক্রমে ভাগ করলে কী পাওয়া যায় লক্ষ করো

$\frac{2}{5}\div\frac{4}{15} = \frac{2}{5}\times\frac{15}{4} = \frac{30}{20}$

$\frac{4}{15}\div\frac{2}{5} = \frac{4}{15}\times\frac{5}{2} = \frac{20}{30}$

$\therefore \frac{2}{5}\div\frac{4}{15} \neq \frac{4}{15}\div\frac{2}{5}$

একই ভাবে,

$$4 \div 2 = 2, \qquad 2 \div 4 = \frac{2}{4}$$
$$4 \div 2 \neq 2 \div 4$$

সেই মতে, $(-6) \div 2 = -3, \qquad 2 \div (-6) = \frac{2}{-6}$

$$(-6) \div 2 \neq 2 \div (-6)$$

দেখা গেল, যেকোনো দুটি পরিমেয় সংখ্যা যে কোনো ক্রমে ভাগ করলে ভাগফল এক হয় না।

পূর্বে যে কথা বলা হয়েছে সেই মতে ভাগের ক্ষেত্রেও a ও b যেকোনো দুটি পরিমেয় সংখ্যা হলে

$$a \div b \neq b \div a$$

অতএব **পরিমেয় সংখ্যাগুলো ভাগের ক্ষেত্রে ক্রম বিনিময় বিধি মেনে চলে না।**

কার্য নীচের সংখ্যাগুলো ভাগের ক্ষেত্রে ক্রম বিনিময় বিধি মেনে চলে কি না পরীক্ষা করে দেখো—

(a) 3, 15 (b) – 5, 17 (c) $\frac{7}{4}$, 1

1.2.3 সহযোগ বিধি (Associative Property)

যেকোনো তিনটি স্বাভাবিক সংখ্যার a, b এবং c -র ক্ষেত্রে তোমরা পেয়েছ যে—

$(a + b) + c = a + (b + c)$।

এবার পরিমেয় সংখ্যার ক্ষেত্রে সহযোগ বিধি প্রযোজ্য হয় কি না সেটা করে দেখি এসো—

(i) যোগের ক্ষেত্রে (Associative Property Under Addition) ঃ যোগের ক্ষেত্রে সহযোগ বিধি মান্য কি না সেটা দেখার জন্য কয়েকটি পরিমেয় সংখ্যা নিয়ে করে দেখি এসো—

$$\left\{\frac{3}{4}+\left(\frac{-2}{3}\right)\right\}+\frac{5}{6}$$
$$=\left\{\frac{9+(-8)}{12}\right\}+\frac{5}{6}$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{5}{6}$$
$$=\frac{1+10}{12}$$
$$=\frac{11}{12}$$

আবার, $\frac{3}{4}+\left\{\left(\frac{-2}{3}\right)+\frac{5}{6}\right\}$

$$=\frac{3}{4}+\left\{\left(\frac{-4+5}{6}\right)\right\}$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$$
$$=\frac{9+2}{12}$$
$$=\frac{11}{12}$$

দেখা গেল

$$\left\{\frac{3}{4}+\frac{(-2)}{3}\right\}+\frac{5}{6}=\frac{3}{4}+\left\{\frac{(-2)}{3}+\frac{5}{6}\right\}$$

সেই মতে,

$$(3+4)+5=7+5=12$$
$$3+(4+5)=3+9=12$$
$$\therefore (3+4)+5=3+(4+5)$$

ঠিক একই ভাবে,

$$\{(-3)+2\}+(-5)$$
$$=(-1)+(-5)$$
$$=-6$$

$$(-3)+\{2+(-5)\}$$
$$=(-3)+(-3)$$
$$=-6$$

দেখা গেল

$$\{(-3)+2\}+(-5)=(-3)+\{2+(-5)\}$$

$\therefore$ a, b, c তিনটি পরিমেয় সংখ্যা হলে

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

অতএব, **পরিমেয় সংখ্যাগুলো যোগের ক্ষেত্রে সহযোগ বিধি মেনে চলে।**

কার্য নীচের সংখ্যাগুলো যোগের ক্ষেত্রে সহযোগ বিধি মেনে চলে কি না দেখো—

(a) $7, -5, 6$ (b) $7, \frac{1}{5}, 0$ (c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

(ii) বিয়োগের ক্ষেত্রে (Associative Property Under Subtraction) ঃ

বিয়োগের ক্ষেত্রে সহযোগ বিধি মান্য কি না, সেটা জানতে কয়েকটি পরিমেয় সংখ্যা বেছে নিয়ে সেটা করে দেখি চলো—

$$\left(-\frac{2}{5}-\frac{7}{10}\right)-\frac{1}{2}$$
$$=\left(\frac{-4-7}{10}\right)-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{-11}{10}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{-11-5}{10}$$
$$=\frac{-16}{10}$$

আবার,

$$\left(\frac{-2}{5}\right)-\left(\frac{7}{10}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{-2}{5}\right)-\left(\frac{7-5}{10}\right)$$
$$=\left(\frac{-2}{5}\right)-\frac{2}{10}$$
$$=\frac{-4-2}{10}$$
$$=\frac{-6}{10}$$

$$\therefore \left\{-\frac{2}{5}-\frac{7}{10}\right\}-\frac{1}{2} \neq -\frac{2}{5}-\left\{\frac{7}{10}-\frac{1}{2}\right\}$$

একই ভাবে,

$$(6-4)-2 = 2-2 = 0$$
$$6-(4-2) = 6-2 = 4$$
$$\therefore (6-4)-2 \neq 6-(4-2)$$

ঠিক তেমনি, $\{(-2)-(-3)\}-(-1)$
$= 1-(-1)$
$= 2$

$(-2)-\{(-3)-(-1)\}$
$= (-2)-(-2)$
$= 0$

দেখা গেল

$$\{(-2)-(-3)\}-(-1) \neq (-2)-\{(-3)-(-1)\}$$

এবার আমরা বলতে পারি যে

a, b, c তিনটি পরিমেয় সংখ্যা হলে

$$(a-b)-c \neq a-(b-c)$$

অতএব, **পরিমেয় সংখ্যা বিয়োগের ক্ষেত্রে সহযোগ বিধি মেনে চলে না।**

কার্য নীচের সংখ্যাগুলি বিয়োগের ক্ষেত্রে সহযোগ বিধি মেনে চলে কি না দেখো—

(a) $7, -5, 6$ (b) $7, \frac{1}{5}, 0$ (c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

(iii) গুণের ক্ষেত্রে (Associative Property Under Multiplication)ঃ

গুণের ক্ষেত্রেও আগের মতো কতগুলি পরিমেয় সংখ্যা নিয়ে দেখা যেতে পারে যে সেটা সহযোগ বিধি মেনে চলে কি না—

$$\left\{\left(-\frac{7}{9}\right)\times\frac{2}{5}\right\}\times\frac{7}{3}$$
$$= \frac{-14}{45}\times\frac{7}{3}$$
$$= \frac{-98}{135}$$

$$\left(-\frac{7}{9}\right)\times\left(\frac{2}{5}\times\frac{7}{3}\right)$$
$$= \left(-\frac{7}{9}\right)\times\frac{14}{15}$$
$$= \frac{-98}{135}$$

এই ক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে—

$$\left\{\left(\frac{-7}{9}\right)\times\frac{2}{5}\right\}\times\frac{7}{3} = \left(\frac{-7}{9}\right)\times\left\{\frac{2}{5}\times\frac{7}{3}\right\}$$

একই ভাবে,

$(3 \times 4) \times 5 = 12 \times 5 = 60$ । অন্যদিকে, $3 \times (4 \times 5) = 3 \times 20 = 60$

$\therefore (3 \times 4) \times 5 = 3 \times (4 \times 5)$

আবার, $(-9) \times \{(-6) \times 4\} = (-9) \times (-24) = 216$

$\{(-9) \times (-6)\} \times 4 = 54 \times 4 = 216$

$\therefore (-9) \times \{(-6) \times 4\} = \{(-9) \times (-6)\} \times 4$

তোমরা ভিন্ন ভিন্ন পরিমেয় সংখ্যা নিয়েও করে দেখতে পারো।
অতএব এই উদাহরণগুলি দেখে আমরা বলতে পারি যে
a, b, c তিনটি যেকোনো পরিমেয় সংখ্যা হলে $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

$\therefore$ **গুণের ক্ষেত্রে পরিমেয় সংখ্যা সহযোগ বিধি মেনে চলে।**

কার্য নীচের সংখ্যাগুলি গুণের ক্ষেত্রে সহযোগ বিধি মেনে চলে কি না দেখো—

(a) 12, –11, 7 (b) – 5, – 4, – 3 (c) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$

(iv) ভাগের ক্ষেত্রে (Associative Property Under Division) ঃ

তিনটি পরিমেয় সংখ্যা নিয়ে ভাগের ক্ষেত্রে সহযোগ বিধি মেনে চলে কি না দেখি...

$$\left(\frac{2}{3} \div \frac{1}{5}\right) \div \left(\frac{-2}{5}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{1}\right) \div \left(\frac{-2}{5}\right)$$
$$= \frac{10}{3} \div \left(\frac{-2}{5}\right)$$
$$= \frac{10}{3} \times \left(\frac{5}{-2}\right)$$
$$= \frac{25}{-3}$$
$$= \frac{-25}{3}$$

$$\frac{2}{3} \div \left\{\frac{1}{5} \div \left(\frac{-2}{5}\right)\right\}$$
$$= \frac{2}{3} \div \frac{1}{5} \times \frac{5}{-2}$$
$$= \frac{2}{3} \div \left(\frac{-5}{10}\right)$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{-10}{5}$$
$$= \frac{-4}{3}$$

$$\therefore \left(\frac{2}{3} \div \frac{1}{5}\right) \div \left(\frac{-2}{5}\right) \neq \frac{2}{3} \div \left\{\frac{1}{5} \div \left(\frac{-2}{5}\right)\right\}$$

সেই মতে, $(6 \div 3) \div 2 = 2 \div 2 = 1$ ও $6 \div (3 \div 2) = 6 \div \frac{3}{2} = 6 \times \frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 4$

$\therefore (6 \div 3) \div 2 \neq 6 \div (3 \div 2)$

অতএব আমরা বলব যে **ভাগের ক্ষেত্রে পরিমেয় সংখ্যাগুলি সহযোগ বিধি মেনে চলে না।**

a, b, c তিনটি পরিমেয় সংখ্যা হলে

$(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$

কার্য নীচের সংখ্যাগুলি ভাগের ক্ষেত্রে সহযোগ বিধি মেনে চলে কি না দেখো—

(a) $6, -2, -3$ (b) $\frac{2}{7}, \frac{5}{6}, 8$ (c) $-\frac{4}{5}, 8, -\frac{7}{9}$

উপরের আলোচনার মাধ্যমে আমরা পরিমেয় সংখ্যার ক্ষেত্রে কী কী শিখলাম—

আবদ্ধতা বিধি	যোগ, বিয়োগ ও গুণের ক্ষেত্রে আবদ্ধ ভাগে আবদ্ধ নয়
বিনিময় বিধি	যোগ ও গুণে মেনে চলে বিয়োগ ও ভাগে মেনে চলে না
সহযোগ বিধি	যোগ ও গুণের ক্ষেত্রে মেনে চলে বিয়োগ ও ভাগে মেনে চলে না

1.2.4 বিতরণ বিধি (Distributive Law)

তোমরা ইতিমধ্যে অখণ্ড সংখ্যার বিতরণ বিধি সম্পর্কে জেনেছে। *a, b, c* তিনটি অখণ্ড সংখ্যার জন্য $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ । পরিমেয় সংখ্যার ক্ষেত্রে এই বিতরণ বিধি দেখে নেওয়া যেতে পারে—

$\frac{3}{4}, \frac{-2}{5}, \frac{5}{6}$ তিনটি পরিমেয় সংখ্যা

এবার,

$$\frac{3}{4} \times \left(\frac{-2}{4} + \frac{5}{6}\right)$$

$$= \frac{3}{4} \times \left(\frac{-2 \times 6}{4 \times 6} + \frac{5 \times 5}{6 \times 5}\right)$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{13}{30}$$

$$= \frac{3 \times 13}{4 \times 30} = \frac{39}{120}$$

আবার, $\frac{3}{4}\times(\frac{-2}{5})+\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$

$=\frac{-6}{20}+\frac{15}{24}$

$=\frac{-36+75}{120}$

$=\frac{39}{120}$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 20,\ 24 \\ \hline 2 & 10,\ 12 \\ \hline & 5,\ \ 6 \end{array}$$

ল.সা.গু. (L.C.M.) $= 2\times2\times5\times6$
$= 120$

দেখা গেল

$$\frac{3}{4}\times\left(\frac{-2}{5}+\frac{5}{6}\right)=\frac{3}{4}\times\left(\frac{-2}{5}\right)+=\frac{3}{4}\times\left(\frac{5}{6}\right)$$

যেকোনো তিনটি পরিমেয় সংখ্যা নিয়েও বিতরণ ধর্ম মেনে চলে কি না, তোমরা দেখতে পার—
অতএব a, b , c তিনটি যেকোনো পরিমেয় সংখ্যা হ'লে

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

একই ভাবে,

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

এই বিধিটিকে যোগ ও বিয়োগ সাপেক্ষে গুণের বিতরণ বিধি বা সংক্ষেপে বিতরণ বিধি বলে।

কার্য নীচের পরিমেয় সংখ্যাগুলি যোগ ও বিয়োগ সাপেক্ষে বিতরণ বিধি মেনে চলে কি না করে দেখো।
$-\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ এবং $\frac{5}{6}$

1.3 যোগাত্মক অভেদ (Additive Identity)

$0 + 2 = 2 = 2 + 0$

$0 + (-5) = (-5) = (-5) + 0$

$\frac{2}{3}+0=\frac{2}{3}=0+\frac{2}{3}$

$\left(\frac{-5}{7}\right)+0=\frac{-5}{7}=0+\left(\frac{-5}{7}\right)$

অতএব, শূন্যের সঙ্গে যেকোনো পরিমেয় সংখ্যা যোগ করলে যোগফল সেই পরিমেয় সংখ্যাটিই হয়।

অর্থাৎ a যেকোনো একটি পরিমেয় সংখ্যা হলে,

$a + 0 = a = 0 + a$

শূন্য(0)কে যোগের ক্ষেত্রে অভেদ বলে ধরা হয়।

শূন্য হল **যোগাত্মক অভেদ (Additive Identity)**।

1.4 গুণাত্মক অভেদ (Multiplicative Identity)

যেকোনো পরিমেয় সংখ্যার সঙ্গে 1এর গুণফল দেখে নেই—

$$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5$$

$$(-3) \times 1 = -3 = 1 \times (-3)$$

$$\frac{5}{6} \times 1 = \frac{5}{6} = 1 \times \frac{5}{6}$$

$$\left(\frac{-3}{2}\right) \times 1 = \frac{-3}{2} = 1 \times \left(\frac{-3}{2}\right)$$

যেকোনো পরিমেয় সংখ্যাকে 1 দ্বারা গুণ করলে গুণফল সেই সংখ্যাটিই হয়।

অর্থাৎ, যেকোনো একটি পরিমেয় সংখ্যা a এর জন্য

$$a \times 1 = a = 1 \times a$$

1 কে পরিমেয় সংখ্যার ক্ষেত্রে **গুণাত্মক অভেদ (Multiplicative Identity)** বলে।

1.5 যোগাত্মক বিপরীত (Additive Inverse)

দুটি সংখ্যার যোগফল শূন্য হলে সংখ্যা দুটির একটিকে অন্যটির **যোগাত্মক বিপরীত (Additive Inverse)** বলা হয়।

যেমন- $3 + (-3) = 0$ তাই 3 এর যোগাত্মক বিপরীত -3

বা, ওল্টোভাবে -3এর যোগাত্মক বিপরীত হচ্ছে 3

$$(-5) + 5 = 0$$

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{-2}{3}\right) = 0$$

অতএব -5 এর যোগাত্মক বিপরীত 5 এর $\frac{2}{3}$ র যোগাত্মক বিপরীত $-\frac{2}{3}$

অতএব, a যেকোনো একটি পরিমেয় সংখ্যা হলে

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

$(-a)$ কে a র যোগাত্মক বিপরীত বা a কে $(-a)$ এর যোগাত্মক বিপরীত বলা হয়।

0 এর যোগাত্মক বিপরীত 0।

কার্য

$\frac{6}{9}$ এর যোগাত্মক বিপরীত কী হবে লেখো ☐

$\frac{-11}{15}$ এর যোগাত্মক বিপরীত কী হবে লেখো ☐

1.6 গুণাত্মক বিপরীত (Multiplicative Inverse)

দুটি সংখ্যার গুণফল 1 হলে সংখ্যা দুটির একটিকে অন্যটির গুণাত্মক বিপরীত বলা হয়, উদাহরণস্বরূপ....

$7\times\frac{1}{7}=1$ অথবা $\frac{1}{7}\times 7=1$ অতএব, 7এর গুণাত্মক বিপরীত $\frac{1}{7}$ বা $\frac{1}{7}$এর গুণাত্মক বিপরীত 7

ঠিক তেমনি

$(-5)\times\left(\frac{1}{-5}\right)=1$ অথবা $\left(\frac{1}{-5}\right)\times(-5)=1$ অর্থাৎ -5এর গুণাত্মক বিপরীত $\frac{1}{-5}$

বা, $\frac{1}{-5}$ এর গুণাত্মক বিপরীত -5

আবার, $\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}=1=\frac{5}{3}\times\frac{3}{5}$ অতএব, $\frac{3}{5}$এর গুণাত্মক বিপরীত $\frac{5}{3}$ বা $\frac{5}{3}$এর গুণাত্মক বিপরীত $\frac{3}{5}$

একই ভাবে,

$\left(-\frac{3}{7}\right)\times\left(-\frac{7}{3}\right)=1=\left(-\frac{7}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{7}\right)$ অতএব $-\frac{3}{7}$এর গুণাত্মক বিপরীত $-\frac{7}{3}$

বা, $-\frac{7}{3}$এর গুণাত্মক বিপরীত $-\frac{3}{7}$

অর্থাৎ, a একটি যেকোনো অশূন্য পরিমেয় সংখ্যা হলে $\frac{1}{a}$ কে a এর গুণাত্মক বিপরীত বা aকে $\frac{1}{a}$ এর গুণাত্মক বিপরীত বলা হয়। গুণাত্মক বিপরীতের সমার্থক শব্দ **প্রতিক্রম (Reciprocal)**।

1এর প্রতিক্রম হল 1।

কার্য তোমার সহপাঠীর লগত আলোচনা করে নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর লেখো।

6 এর গুণাত্মক বিপরীত ☐

(– 9) এর গুণাত্মক বিপরীত ☐

$\frac{2}{3}$ এর গুণাত্মক বিপরীত ☐

$\frac{-5}{7}$ এর গুণাত্মক বিপরীত ☐

$\frac{1}{7}$ এর গুণাত্মক বিপরীত ☐

উদাহৰণ 1 ঃ সংখ্যাৰ বিধি ব্যবহাৰ কৰে মান নিৰ্ণয় কৰো

$$\frac{2}{5}\times\frac{-2}{7}-\frac{1}{12}-\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}$$

সমাধান ঃ

$$\frac{2}{5}\times\frac{-2}{7}-\frac{1}{12}-\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}$$

$$=\left(\frac{2}{5}\times\frac{-2}{7}-\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{12}$$

$$=\frac{2}{5}\times\left(\frac{-2}{7}-\frac{3}{7}\right)-\frac{1}{12} \qquad \text{(বিতৰণ বিধি)}$$

$$=\frac{2}{5}\times\left(\frac{-2-3}{7}\right)-\frac{1}{12}$$

$$=\frac{2}{5}\times\left(\frac{-5}{7}\right)-\frac{1}{12}$$

$$=\frac{-2}{7}-\frac{1}{12}$$

$$=\frac{-24-7}{84} \qquad \text{[7 এবং 12 ৰ ল.সা.গু. 84]}$$

$$=\frac{-31}{84}$$

উদাহৰণ 2 ঃ $-2\times\frac{5}{7}$ এৰ যোগাত্মক বিপৰীত সংখ্যাটি লেখো

সমাধান ঃ $-2\times\frac{5}{7}$ এৰ যোগাত্মক বিপৰীত সংখ্যাটি হচ্ছে $+\left(2\times\frac{5}{7}\right)=2\times\frac{5}{7}=\frac{10}{7}$

অথবা, এভাবেও কৰতে পাৰি

$-2\times\frac{5}{7}=\frac{-10}{7}$ এৰ যোগাত্মক বিপৰীত সংখ্যাটি হল $\frac{10}{7}$

উদাহৰণ 3 ঃ $2\times\frac{-6}{7}$ এৰ গুণাত্মক বিপৰীত কী হবে লেখো

সমাধান ঃ $2\times\left(\frac{-6}{7}\right)=\frac{2\times(-6)}{7}=-\frac{12}{7}$

$\therefore\ -\frac{12}{7}$ এৰ গুণাত্মক বিপৰীত $-\frac{7}{12}$

অনুশীলনী (Exercise) 1.1

1. এগুলি শুদ্ধ কি না বিচার করো ঃ

   (i) পরিমেয় সংখ্যা যোগ ও গুণের বিনিময় বিধি মেনে চলে।

   (ii) পরিমেয় সংখ্যা বিয়োগ ও ভাগের ক্ষেত্রে সহযোগ বিধি মেনে চলে।

   (iii) পরিমেয় সংখ্যা বিয়োগে আবদ্ধ হয় না।

   (iv) শূন্যের প্রতিক্রম নেই।

   (v) 0 হচ্ছে পরিমেয় সংখ্যা।

   (vi) $\frac{3}{2}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{2}$

   (vii) $\frac{5}{9}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{3}\right)=\frac{5}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{7}{3}$

   (viii) $\frac{7}{12}-\frac{3}{7}+\frac{11}{12}=\frac{7}{12}-(\frac{3}{7}+\frac{11}{12})$

   (ix) $\frac{-3}{11}\times\frac{2}{9}=\frac{-3}{11}$

   (x) $\frac{4}{9}\left(\frac{11}{12}+\frac{-5}{6}\right)=\frac{4}{9}\times\frac{11}{12}+\frac{4}{9}\times\left(\frac{-5}{6}\right)$

2. যোগাত্মক বিপরীত সংখ্যাগুলি লেখো।

   (i) $\frac{-7}{9}$ (ii) 3 (iii) $\frac{-2}{8}$

   (iv) $\frac{19}{-7}$ (v) $\frac{-a}{c}$

3. $-\frac{20}{11}$ এবং $\frac{5}{6}$ এর যোগাত্মক বিপরীত সংখ্যা দুটি লেখো।

4. গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যাগুলি লেখো

   (i) – 13 (ii) $\frac{-4}{9}\times\frac{-2}{7}$ (iii) $-2\times\frac{2}{5}$

   (iv) – 1 (v) $\frac{2n}{5}$

5. $-1\frac{2}{3}$ এর গুণাত্মক বিপরীত $\frac{5}{3}$ হবে কি? যুক্তি প্রদর্শন করো।

6. 1 এর গুণাত্মক ও যোগাত্মক বিপরীত কী কী?

7. $\frac{-4}{9}$ এবং $\frac{11}{16}$ এর গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যা দুটি লেখো।

8. নীচের সংখ্যা দুটির প্রতিক্রম লেখো।

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-5}{12}$

9. প্রতিক্রমের সঙ্গে একই, এমন পরিমেয় সংখ্যা কী কী?

10. $\frac{-25}{26}$ কে $\frac{5}{13}$ র প্রতিক্রমের দ্বারা গুণ করো।

11. কী বিধি প্রয়োগ করা হয়েছে লেখো—

(i) $\frac{-3}{5}\times\frac{-2}{7}=\frac{-2}{7}\times\frac{-3}{5}$ (ii) $\frac{-4}{5}+0=\frac{-4}{5}=0+\frac{-4}{5}$ (iii) $\frac{2}{9}\times1=1\times\frac{2}{9}=\frac{2}{9}$

12. সংখ্যার বিধি ব্যবহার করে মান নির্ণয় করো।

(i) $\frac{6}{7}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{1}{5}$

(ii) $670\times\frac{7}{11}+670\times\frac{1}{3}$

(iii) $\frac{7}{5}\times\left(\frac{-3}{8}\right)+\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}$

(iv) $-\frac{5}{9}\left(\frac{-27}{15}+\frac{36}{25}\right)$

(v) $\frac{2}{3}+\frac{3}{3}-\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$

(vi) $\frac{4}{7}\times\left(\frac{-5}{9}\right)+\frac{4}{7}\times\frac{1}{5}$

(vii) $\frac{2}{3}\times(\frac{-5}{7})-\frac{1}{6}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{14}\times\frac{2}{3}$

13. নীচের সংখ্যাগুলি যোগ ও পূরণের ক্ষেত্রে সহযোগ বিধি মেনে চলে কিনা করে দেখো—

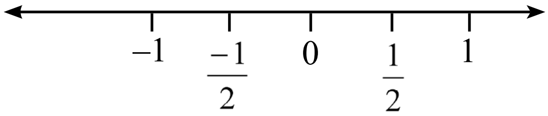
$-\frac{2}{3}, \frac{3}{8}$ ও $\frac{4}{5}$

14. একটি উদাহরণ দিয়ে দেখাও যে পরিমেয় সংখ্যা ভাগের ক্ষেত্রে আবদ্ধ নয়।

1.7 সংখ্যারেখায় পরিমেয় সংখ্যার উপস্থাপন (Representation of Rational Numbers on the Number Line)

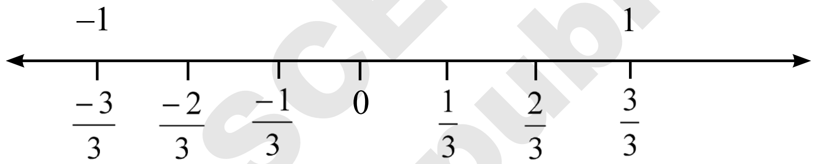
অখণ্ড সংখ্যাগুলোকে যেভাবে সংখ্যা রেখায় দেখানো হয়েছে ঠিক সেইভাবে পরিমেয় সংখ্যাগুলোকেও সংখ্যারেখায় দেখাতে পারি।

(i) নীচের সংখ্যা রেখাটিকে লক্ষ করো



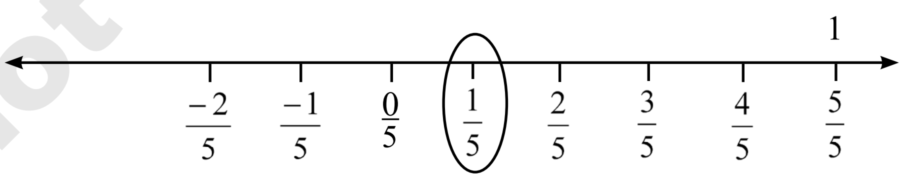
সংখ্যারেখায় 0 এবং 1 নির্দেশ করা বিন্দু দুটির মাঝখানের বিন্দুটিকে $\frac{1}{2}$ লিখে চিহ্নিত করা হয়েছে। অর্থাৎ 0 এবং 1 নির্দেশ করা বিন্দু দুটির মাঝখানের রেখাখণ্ডকে সমান দুভাগ করা হয়েছে। একইভাবে –1 এবং 0 এর মাঝখানের রেখাখণ্ডকে সমান দুভাগ করে যে বিন্দুটি পাওয়া গেছে সেটাকে $-\frac{1}{2}$ লিখে চিহ্নিত করা হয়েছে।

(ii)



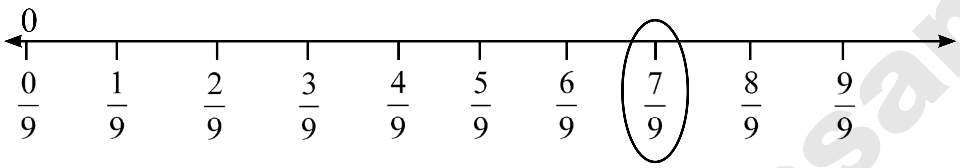
সংখ্যারেখায় 0 এবং 1 এর মাঝখানের রেখাখণ্ডকে সমান ভাবে তিন ভাগ করা বিন্দু দুটিকে $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ লিখে চিহ্নিত করা হয়েছে। একই ভাবে –1 এবং 0 র রেখাখণ্ডকে 3 ভাগ করে ক্রমে $-\frac{1}{3}$ ও $-\frac{2}{3}$ লিখে চিহ্নিত করা হয়েছে।

(iii) সংখ্যারেখায় $\frac{1}{5}$ দেখানোর জন্য 0 এবং 1 এর মধ্যের রেখাখণ্ডকে সমান সমান 5 টি ভাগে ভাগ করতে হবে। পাঁচ ভাগ করা চারটি বিন্দুকে 0 থেকে ক্রমে $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ এবং $\frac{4}{5}$ লিখে চিহ্নিত করা হয়েছে।



এভাবে 0 এবং 1 এর মধ্যে যেকোনো পরিমেয় সংখ্যাকে সংখ্যারেখায় প্রকাশ করা যেতে পারে। এই সব পরিমেয় সংখ্যার হরটি সংখ্যার প্রথম একক দূরত্বকে (0 থেকে 1 পর্যন্ত) কতগুলি সমানভাবে ভাগ করতে হবে সেটি নির্দেশ করে।

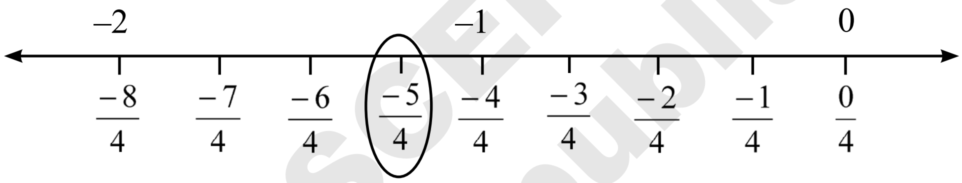
উদাহরণ 1 ঃ $\frac{7}{9}$ কে সংখ্যারেখায় উপস্থাপন



$\frac{7}{9}$ এ হর 9

সংখ্যারেখায় 0 এবং 1 নির্দেশ করা বিন্দু দুটির মধ্যে রেখাখণ্ডকে সমান ভাবে 9 ভাগ করা হল। 7 ভাগ যেখানে হয়েছে সেই স্থানটি $\frac{7}{9}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়েছে।

উদাহরণ 2 ঃ $\frac{-5}{4}$ কে সংখ্যারেখায় উপস্থাপন



কার্য নীচের সংখ্যাগুলো সংখ্যারেখায় উপস্থাপন করো।

$\frac{2}{3}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{-2}{5}, \quad \frac{-1}{4}, \quad \frac{-7}{9}, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{-9}{5}$

1.8 দুটি পরিমেয় সংখ্যার মাঝের পরিমেয় সংখ্যা (Rational Numbers Between Two Rational Numbers)

নীচের কথাটুকু লক্ষ করো।

2 এবং 5 এর মধ্যে স্বাভাবিক সংখ্যা 3 এবং 4

– 3 এবং 3 এর মধ্যে অখণ্ড সংখ্যা – 2, – 1, 0, 1 এবং 2

আবার, $\frac{5}{11}$ এবং $\frac{9}{11}$ এর মধ্যে $\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{8}{11}$ যেকোনো তিনটি পরিমেয় সংখ্যা আছে।

এখানে

$\frac{5}{11}$ কে $\frac{5\times10}{11\times10} = \frac{50}{110}$ এবং

$\frac{9}{11}$ কে $\frac{9\times10}{11\times10} = \frac{90}{110}$ লেখা যায়।

এবাৰ $\frac{51}{110}, \frac{52}{110}, \frac{53}{110}$ ...... $\frac{89}{110}$ এই পৰিমেয় সংখ্যাগুলিও $\frac{50}{110}$ এবং $\frac{90}{110}$ ৰ মধ্যে ৰয়েছে $\frac{5}{11}$ এবং $\frac{9}{11}$ এৰ মধ্যে ৰয়েছে।

একইভাবে

$$\frac{5}{11} = \frac{50}{110} = \frac{50 \times 10}{110 \times 10} = \frac{500}{1100}$$

$$\frac{9}{11} = \frac{90}{110} = \frac{90 \times 10}{110 \times 10} = \frac{900}{1100}$$ এভাবে লেখা যেতে পাৰে।

এখানে $\frac{501}{1100}, \frac{502}{1100}, ...$ $\frac{899}{1100}$ এই সংখ্যাগুলি $\frac{500}{1100}$ এবং $\frac{900}{1100}$ ৰ মধ্যে ৰয়েছে।

এই সবগুলি সংখ্যা $\frac{5}{11}$ এবং $\frac{9}{11}$ সংখ্যা দুটিৰ মধ্যে আছে। একইভাবে এই সংখ্যাদুটিৰ মধ্যে আৰো অনেক সংখ্যা বেৰ কৰা যায়।

অতএব, দেখা যাচ্ছে **দুটি পৰিমেয় সংখ্যাৰ মধ্যে অসংখ্য পৰিমেয় সংখ্যা আছে।**

লক্ষ্য কৰো (Observe) ঃ দুটি স্বাভাবিক বা অখণ্ড সংখ্যাৰ মধ্যে অসংখ্য স্বাভাবিক বা অসংখ্য অখণ্ড সংখ্যা থাকে না। এই সংখ্যা সীমিত।

উদাহৰণ 1 ঃ $\frac{-3}{5}$ এবং $\frac{2}{7}$ এৰ মধ্যে কয়েকটি পৰিমেয় সংখ্যা বেৰ কৰো।

সমাধান ঃ প্ৰথমে সংখ্যা দুটিকে একই হৰবিশিষ্ট সংখ্যায় পৰিবৰ্তন কৰতে হবে।

$$\frac{-3}{5} = \frac{-3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{-21}{35}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{2 \times 5}{7 \times 5} = \frac{10}{35}$$

[5 এবং 7এৰ ল.সা.গু. = 35]

$\frac{-3}{5}$ এবং $\frac{2}{7}$ এৰ মধ্যে কয়েকটি পৰিমেয় সংখ্যা হল $\frac{-20}{35}, \frac{-19}{35}, ..., \frac{9}{35}$

কাৰ্য $-\frac{5}{6}$ এবং $\frac{3}{8}$ এৰ মধ্যে কয়েকটি পৰিমেয় সংখ্যা লেখো।

উদাহৰণ 2 ঃ – 3 এবং– 1এৰ মধ্যে কতগুলি পৰিমেয় সংখ্যা আছে দেখে নেই এসো।

সমাধান ঃ – 3 এবং– 1 এৰ মধ্যে অখণ্ড সংখ্যা হল – 2

কিন্তু, – 3 এবং – 1 এর মধ্যে অন্যান্য পরিমেয় সংখ্যা পাওয়া যাবে।

$$\frac{-3}{1}=\frac{-3\times10}{1\times10}=\frac{-30}{10}$$

$$\frac{-1}{1}=\frac{-1\times10}{1\times10}=\frac{-10}{10}$$

$\frac{-29}{10}, \frac{-28}{10}, \ldots\ldots, \frac{-11}{10}$ এই সংখ্যাগুলি – 3 এবং – 1 এর মধ্যে রয়েছে। আমরা এর চাইতেও বেশি পরিমেয় সংখ্যা পেতে পারি। যেমন—

$$-3=\frac{-30}{10}=\frac{-30\times10}{10\times10}=\frac{-300}{100}$$

$$-1=\frac{-10}{10}=\frac{-10\times10}{10\times10}=\frac{-100}{100}$$

– 3 এবং– 1 এর মধ্যে $\frac{-299}{100}, \frac{-298}{100}, \ldots\ldots, \frac{-102}{100}, \frac{-101}{100}$

এভাবে দুটি পরিমেয় সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য পরিমেয় সংখ্যা নির্ণয় করতে পারি।

এই পদ্ধতি ছাড়াও **গড় বা মধ্যমান (average or mean) নির্ণয় পদ্ধতি**র মাধ্যমেও দুটি পরিমেয় সংখ্যার মধ্যের পরিমেয় সংখ্যা নির্ণয় করতে পারি। নীচে উদাহরণ সহকারে দেখানো হল।

উদাহরণ 3 ঃ মধ্যমান বা গড় নির্ণয় পদ্ধতির দ্বারা $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{5}$ এর মধ্যের দুটি পরিমেয় সংখ্যা নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{5}$ র মধ্যমান বা গড়

$$=\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)}{2}=\frac{4}{15}$$

$\frac{4}{15}$ এটা $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{5}$ এর মধ্যে থাকবে।

আবার $\frac{4}{15}$ এবং $\frac{1}{3}$ এর মধ্যমান বা গড় নির্ণয় করতে হবে।

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{15}\right)\div2 \quad =\frac{3}{10}$$

$\frac{4}{15}$ এবং $\frac{1}{3}$ র মধ্যের সংখ্যা $\frac{3}{10}$

$\frac{1}{5}$ এবং $\frac{1}{3}$ র মধ্যের দুটি সংখ্যা $\frac{4}{15}$ এবং $\frac{3}{10}$

এভাবে আবার দুটি সংখ্যার মধ্যে ($\frac{1}{3}$ এবং $\frac{3}{10}$) মধ্যমান নিয়ে $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{5}$ র মাঝখানে পরিমেয় সংখ্যা নির্ণয় করা যায়।

a এবং b দুটি পরিমেয় সংখ্যা হলে $\frac{a+b}{2}$ a এবং b র মাঝখানে থাকা পরিমেয় সংখ্যা হবে, যেখানে $a < \frac{a+b}{2} < b$

অনুশীলনী 1.2

1. নীচের সংখ্যাগুলি সংখ্যারেখায় বসাও।

(i) $\frac{9}{5}$ (ii) $\frac{-2}{13}$ (iii) $\frac{-5}{7}$ (iv) $\frac{-1}{3}$ (v) $\frac{3}{2}$

2. নীচের সংখ্যাগুলির মধ্যের যেকোনো পাঁচটি করে পরিমেয় সংখ্যা লেখো। 5 টি করে পরিমেয় সংখ্যা লেখো।

(i) $\frac{-3}{5}$ এবং $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{-2}{3}$ এবং $\frac{5}{3}$

(iii) -5 এবং -4 (iv) $\frac{-2}{-3}$ এবং $\frac{3}{7}$

3. $\frac{-2}{5}$ থেকে বড় ও $\frac{1}{2}$ থেকে ছোট যেকোনো 5 টি পরিমেয় সংখ্যা বের করো।

আমরা কী কী লিখলাম ?

1. $\frac{p}{q}$ একটি পরিমেয় সংখ্যা, যেখানে p এবং q অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$
2. সমস্ত অখণ্ড সংখ্যাই পরিমেয় সংখ্যা।
3. পৌনঃপৌনিক দশমিক সংখ্যাগুলি পরিমেয় সংখ্যা।
4. পরিমেয় সংখ্যাগুলি যোগ বিয়োগ এবং গুণ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে আবদ্ধ।
5. শূন্যকে বাদ দিয়ে পরিমেয় সংখ্যাগুলি ভাগের ক্ষেত্রে আবদ্ধ।
6. পরিমেয় সংখ্যাগুলি যোগ ও ভাগের ক্ষেত্রে ক্রম বিনিময় বিধি মেনে চলে। কিন্তু বিয়োগ ও ভাগের ক্ষেত্রে ক্রম বিনিময় বিধি মেনে চলে না।
7. পরিমেয় সংখ্যা যোগ ও গুণের ক্ষেত্রে সহযোগ বিধি মেনে চলে, কিন্তু বিয়োগ ও ভাগের ক্ষেত্রে সহযোগ বিধি মেনে চলে না।
8. শূন্য (0) কে পরিমেয় সংখ্যার যোগাত্মক অভেদ ও এক (1) কে পরিমেয় সংখ্যার গুণাত্মক অভেদ বলা হয়।
9. দুটি সংখ্যার যোগফল শূন্য হলে সংখ্যা দুটির একটিকে অন্যটির যোগাত্মক বিপরীত বলা হয়।
10. দুটি সংখ্যার গুণফল 1 হলে সংখ্যা দুটির একটি অন্যটির গুণাত্মক বিপরীত বলে চিহ্নিত করা হয়।
11. a, b ও c যেকোনো তিনটি পরিমেয় সংখ্যা হলে

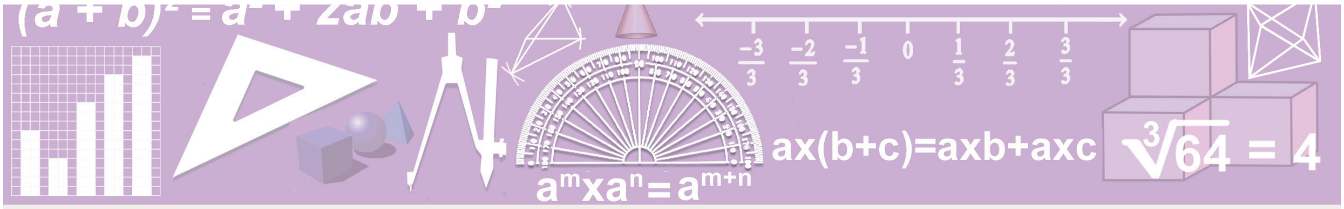
    $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

    একইভাবে

    $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

    এই ধর্মটিকে যোগ ও বিয়োগের সাপেক্ষে গুণের বিতরণ বিধি বা সংক্ষেপে বিতরণ বিধি বলা হয়।
12. পরিমেয় সংখ্যাগুলিকে সংখ্যারেখায় দেখাতে পারি।
13. দুটি পরিমেয় সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য পরিমেয় সংখ্যা থাকে।

❑❑❑



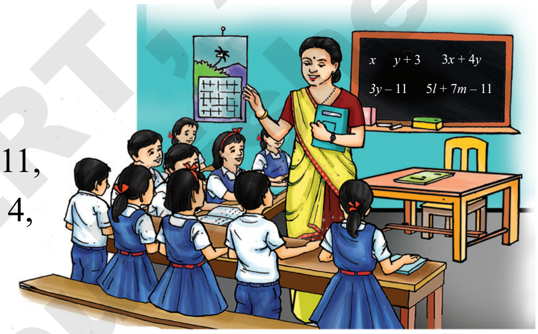
অধ্যায় -2

J1F7Q8

এক চলকবিশিষ্ট এক ঘাতের সমীকরণ
(First Degree Equations in One Variable)

2.1 শিক্ষক ছাত্র-ছাত্রীদের কতগুলি বীজগণিতীয় রাশির (Algebraic Expression) উদাহরণ দিতে বললেন। ছাত্র-ছাত্রীরা বলে চলল এবং শিক্ষক ব্ল্যাক বোর্ডে (Black Board) লিখে নিলেন। ছাত্র-ছাত্রীরা কী উদাহরণ দিল দেখে নেই চলো—

x,	$y + 3$,	$3y - 11$,
$x^2 + 3$,	$2m - \frac{11}{6}$	$3x + 4y$,
$x^2 - 5x + 6$,	$p^3 + 3p^2 - 8$,	$5l + 7m - 11$,
$3x^2 - 7y + 8z$	$ax + b$	$px^3 + qy + 4$,
$6x - 7y + 5z$		



শিক্ষক রাশিগুলি থেকে দুটি তালিকা সাজালেন।

$x,\ \ y + 3,\ 3y - 11,\ \ x^2 + 3$

$2m - \frac{11}{6},\ \ \ x^2 - 5x + 6,$

$p^3 + 3p^2 - 8,\ \ ax + b$

তালিকা- 1

$3x + 4y,\ \ \ 5l + 7m - 11$

$3x^2 - 7y + 8z,\ \ \ px^3 + qy + 4$

$6x - 7y + 5z$

তালিকা- 2

তালিকা দুটি ছাত্র-ছাত্রীদের মন দিয়ে লক্ষ্য করতে বলা হল এবং তারপরে তাদের নীচের প্রশ্নগুলি জিজ্ঞাসা করা হল—

শিক্ষক ঃ এক নম্বর তালিকায় রাশিগুলির মধ্যে কোনো মিল আছে কি?

রমেন ঃ প্রত্যেকটি রাশির চলকের সংখ্যা 1

শিক্ষক ঃ কী কী চলক (Variable) ব্যবহার হয়েছে বলতে পারবে কি?

নিশা ঃ x, y, m ও p

শিক্ষক ঃ এছাড়াও অন্য চলক থাকতে পারে কি?

রুবিনা ঃ পারে স্যার। যেমন- $5z + 8$, $9t - 17$ ইত্যাদি

শিক্ষক ঃ তালিকা-1 এবং তালিকা-2র মধ্যে কোনো পার্থক্য দেখতে পারছ কি?

নাফিচা ঃ 2 নং তালিকাটির রাশিগুলিতে 2 টি চলক আছে।

শিক্ষক ঃ প্রত্যেকটিতে 2 টি চলক আছে কি?

জেনি ঃ নেই স্যার, কতগুলিতে 2 টির চেয়েও বেশি আছে।

শিক্ষক ঃ বেশ। 1 নং তালিকাটিতে থাকা রাশিগুলি এক চলকবিশিষ্ট বীজগণিতীয় রাশি। অন্যাদিকে 2 নং তালিকাটিতে থাকা বীজগাণিতিক রাশিগুলি হচ্ছে একাধিক চলকবিশিষ্ট। অর্থাৎ বীজগাণিতিক রাশিগুলি এক বা একাধিক চলকবিশিষ্ট হতে পারে।

শিক্ষক মহাশয় এবার তালিকাদুটিতে থাকা বীজগাণিতিক রাশিগুলির ঘাতগুলি লক্ষ্য করতে বললেন। $x^2 - 5x + 6$ রাশির পদটিতে ***x* ভূমি (Base), 2 সূচক (Exponent)** । আমরা x^2 কে x-এর **দ্বিতীয় ঘাত** বলে থাকি। ঠিক তেমনি p^3 পদটিতে p ভূমি, 3 সূচক। p^3 কে আমরা p-র তৃতীয় ঘাত বলি।

x2→ সূচক
↓
ভূমি

শিক্ষক ঃ 1 নং তালিকায় থাকা বীজগাণিতিক রাশিগুলির চলকের সর্বোচ্চ ঘাত কী হবে বলতে পারবে তো?

ৰুমী ঃ x রাশিটিতে x-এর সর্বোচ্চ ঘাত 1

$y + 3$ রাশিটিতে y এর সর্বোচ্চ ঘাত 1

$x^2 - 5x + 6$ রাশিটিতে x এর সর্বোচ্চ ঘাত 2

$p^3 + 3p^2 - 8$ রাশিটিতে p র সর্বোচ্চ ঘাত 3

শিক্ষক ঃ বীজগাণিতিক একটি রাশির চলকের সর্বোচ্চ ঘাতটিকে বীজগাণিতিক রাশিটির **মাত্রা (degree)** বলা হয়। এবার তোমরা 1 নং তালিকাটি থেকে একমাত্রাযুক্ত বীজগণিতীয় রাশিগুলি বেছে বের করতে পারবে কি?

দীক্ষিতা ঃ পারব স্যার। $x, y + 3, \quad 2m - \frac{11}{6}, \quad ax + b$

শিক্ষক ঃ এসব রাশিগুলিকে **এক চলকবিশিষ্ট এক ঘাতের বীজগণিতীয় রাশি (Algebraic expression in one variable)** বলে। তোমরা 2 নং তালিকাটি থেকে এক চলকবিশিষ্ট এক ঘাতের বীজগাণিতিক রাশি খুঁজে পাবে কি?

নিশা ঃ পাব না স্যার। কারণ, এখানে চলকের সংখ্যা একাধিক।

শিক্ষক ঃ ঠিকই বলেছ। আমরা এক চলকবিশিষ্ট এক ঘাতের বীজগণিতীয় রাশি খুঁজে পাব না। কিন্তু আমরা দুটি বা তার চেয়ে বেশি চলকবিশিষ্ট এক ঘাতের রাশি তালিকাটিতে খুঁজে পাব।
যেমন— $3x + 4y, 5l + 7m - 11, 6x - 7y + 5z$

কার্য তোমরা 3-4 জনের দল তৈরি করো। প্রত্যেক দলে 10টা করে বীজগণিতীয় রাশির উদাহরণ দাও। এই উদাহরণগুলি থেকে একটি এক চলকবিশিষ্ট এক ঘাতের বীজগাণিতিক রাশিগুলি বেছে বের করো।

2.2 এক চলকবিশিষ্ট এক ঘাতের সমীকরণ (Linear Equation in One Variable)

একটি সমস্যার বীজগণিতীয় রূপ হ'ল সমীকরণ। তোমরা ইতিমধ্যে $3x - 7 = 9$, $y - 9 = 16$, $4z + 7 = 27$ ইত্যাদি আগের ক্লাসে পেয়েছ। এসব এক-একটি সমীকরণ (Equation) ।

$3x - 7 = 9$ $4z + 7 = 27$
↑ ↑   ↑ ↑
চলক সমতা   চলক সমতা

(Variable) (Equality)

এই ধরণের সমীকরণগুলিই হচ্ছে এক চলকবিশিষ্ট এক ঘাতের সমীকরণ। উদাহরণস্বরূপ,

(i) $2x = 12$

(ii) $3x = x+5$

(iii) $ax + b = c$, যেখানে a, b, c ধ্রুবক

(iv) $5m = p^2$, যেখানে p ধ্রুবক

(v) $2y - 7 = 8y$ ইত্যাদি

নিজে চেষ্টা করো (Try Yourself)

নীচের সমীকরণগুলি থেকে এক চলক বিশিষ্ট এক ঘাতের সমীকরণগুলি শনাক্ত করো ঃ (a,b,c,p,q ধ্রুবক)

(i) $5x + 3y - 7 = 9$ (ii) $5m - 8 = 0$ (iii) $5 = 3l$

(iv) $x^2 - 9y + 11 = 9$ (v) $ax^2 + bx + c = 0$ (vi) $px + q = 10$

(vii) $a^2x + b = 0$ (viii) $ax^2 + b = 0$ (ix) $y = 0$

(x) $z = p^3$ (xi) $3y + 8 = 3y - 2$ (xii) $5z = -z + 6$

2.3 একটি চলকের এক ঘাতের সমীকরণের সমাধান (Solution of a linear equation in one variable)

ইতিমধ্যে তোমরা শিখেছ যে, এক ঘাতের সমীকরণের চলকের কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্য সমীকরণের বাঁ পক্ষ ও ডান পক্ষ সমান হয়। চলকের সেই নির্দিষ্ট মানকেই সমীকরণটির **বীজ** বা **মূল (Root)** বলে। সমীকরণটি থেকে চলকের সেই মান বের করা কাজটিই হচ্ছে সমীকরণের **সমাধান (Solution)**।

এছাড়া সপ্তম শ্রেণিতেই পেয়েছ যে, সমীকরণ সমাধান করার সময় চলকযুক্ত রাশিগুলি সমতার বাঁ-পক্ষে রেখে অন্য রাশিগুলি সমতার ডানপক্ষে পক্ষান্তর করা হয়। যে জন্য আমরা নীচের প্রক্রিয়াগুলির (প্রয়োজন অনুসারে) সাহায্য নেই।

(i) দুই পক্ষে একই সংখ্যা যোগ করো।

(ii) দুই পক্ষ থেকে একই সংখ্যা বিয়োগ করো।

(iii) দুই পক্ষকে একই সংখ্যা দিয়ে গুণ করো।

(iv) দুই পক্ষকে একই অশূন্য (non-zero) সংখ্যা দিয়ে ভাগ করো।

নীচের উদাহরণগুলি লক্ষ করো ঃ

উদাহরণ 1 ঃ **সমাধান করো** $x - 3 = 6$

বা, $x - 3 + 3 = 6+3$ [দুই পক্ষের সঙ্গে 3 যোগ করো]

বা, $x = 9$

নির্ণেয় সমাধান ঃ $x = 9$

উদাহরণ 2 ঃ সমাধান করো $\frac{y}{7} = 2$

সমাধান ঃ দুই পক্ষকে 7 দিয়ে গুণ করে,

$$\frac{y}{7} \times 7 = 2 \times 7$$

বা, $y = 14$

উদাহরণ 3 ঃ সমাধান করো $\frac{3x}{4} + 3 = 5$

সমাধান ঃ $\frac{3x}{4} + 3 - 3 = 5 - 3$ [দুই পক্ষ থেকে 3 বিয়োগ করে]

বা, $\frac{3x}{4} = 2$

বা, $\frac{3x}{4} \times 4 = 2 \times 4$ [দুই পক্ষকে 4 দিয়ে গুণ করে]

বা, $3x = 8$

বা, $\frac{3x}{3} = \frac{8}{3}$ [দুই পক্ষকে 3 দিয়ে ভাগ করে]

বা, $x = \frac{8}{3}$

উদাহরণ 4 ঃ সমাধান করো $3x + 4 = 22$

সমাধান ঃ সমীকরণটির সমতার জন্য ও অজ্ঞাত রাশিটিকে সমতার বাঁ দিকে রাখতে দুই পক্ষ থেকে 4 বিয়োগ করলে পাব

$$3x + 4 - 4 = 22 - 4$$

অথবা $3x = 18$

অজ্ঞাত রাশি x র সঙ্গে 3 গুণ হয়ে রয়েছে। x-এর মান নির্ণয় করার জন্য দুই পক্ষকে 3 দিয়ে ভাগ (গুণের উল্টো) করে পাই

$$\frac{3x}{3} = \frac{18}{3}$$

অথবা $x = 6$

উদাহরণ 5 ঃ সমাধান করো $6x - 8 = 20$

সমাধান ঃ দুই পক্ষে 8 যোগ করে

$$6x - 8 + 8 = 20 + 8$$

বা, $6x = 28$

বা, $\frac{6x}{6} = \frac{28}{6}$ [দুই পক্ষে 6 দিয়ে ভাগ করে]

বা, $x = \frac{28}{6}$

বা, $x = \frac{28 \div 2}{6 \div 2}$ [2 হচ্ছে 28 এবং 6 এর গ.সা.উ.]

$= \frac{14}{3}$

ইতিমধ্যে তোমরা 5 টি উদাহরণ দেখলে। প্রত্যেক উদাহরণেই অজ্ঞাত রাশির (অর্থাৎ চলকের) মান নির্ণয় করা হয়েছে অর্থাৎ সমাধান করা হয়েছে।

উদাহরণ 6 ঃ উদাহরণ 1 এর সমাধানটি শুদ্ধ হয়েছে কি না দেখে নেই।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণটির বাঁ পক্ষে x-এর মান 6 বসালে পাই

বাম পক্ষ $= 3x + 4$

$= 3 \times 6 + 4$

$= 18 + 4$

$= 22$

= ডান পক্ষ

$\therefore$ $3x + 4 = 22$ এর সমাধান 6

উদাহরণ 7 ঃ $6x - 8 = 20$ এর সমাধান $\frac{14}{3}$ হবে কি?

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণটির বাঁ-পক্ষে x এর মান $\frac{14}{3}$ বসালে পাই,

বাম পক্ষ $= 6x - 8$

$= 6 \times \frac{14}{3} - 8$

$= 2 \times 14 - 8$

$= 28 - 8 \quad = 20$ = ডান পক্ষ

$\therefore$ $6x - 8 = 20$ এর সমাধান $\frac{14}{3}$

উদাহরণ 8 ঃ $2x - 3 = x + 6$ এর সমাধান 9 হবে কি?

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণটির বাঁ-পক্ষ ও ডানপক্ষে x এর মান 9 বসালে পাই

বাম পক্ষ $= 2x - 3$	ডান পক্ষ $= x + 6$
$= 2 \times 9 - 3$	$= 9 + 6$
$= 18 - 3$	$= 15$
$= 15$	

দেখা যাচ্ছে, বাম পক্ষ = ডান পক্ষ

$\therefore$ $x = 9$, $2x - 3 = x + 6$ র সমাধান।

উদাহরণ 9 ঃ $2x - 3 = 5 - x$ এর সমাধান 3 হবে কি?

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণটির বাম পক্ষ ও ডান পক্ষে x-এর মান 3 বসিয়ে আমরা পাচ্ছি

বাম পক্ষ	ডান পক্ষ
$= 2x - 3$	$= 5 - x$
$= 2 \times 3 - 3$	$= 5 - 3$
$= 6 - 3$	$= 2$
$= 3$	

যেহেতু বাম পক্ষ $\neq$ ডান পক্ষ।

তাই 3, $2x - 3 = 5 - x$ এর সমাধান নয়। তোমরা সমীকণটির শুদ্ধ সমাধানটি বের করো ও এর সত্যতা প্রমাণ করো।

উদাহরণ 10 ঃ **সমাধান করো** $\frac{3}{4}x + 5 = 15 - 3x$

সমাধান ঃ $\frac{3}{4}x + 5 = 15 - 3x$

বা, $\frac{3}{4}x + 3x + 5 = 15$ [লক্ষ্য করো যে ডান পক্ষের $-3x$ টি বাঁ দিকে এসে $+3x$ হল। অর্থাৎ সমীকরণটির '=' চিহ্নের একটি পক্ষ থেকে অন্য পক্ষে পদ পক্ষান্তর হলে ধনাত্মক পদ ঋণাত্মক হয় এবং ঋণাত্মক পদ ধনাত্মক হয়।]

বা, $\left(\frac{3}{4} + 3\right)x + 5 = 15$

বা, $\left(\frac{3+12}{4}\right)x + 5 = 15$

বা, $\frac{15x}{4} + 5 = 15$

বা, $\frac{15x}{4} = 15 - 5$ [বামপক্ষে অবস্থিত 5 কে ডানপক্ষে আনার ফলে এটা -5 হয়েছে]

বা, $\frac{15x}{4} = 10$

বা, $15x = 10 \times 4$ [দুই পক্ষকে 4 দিয়ে গুণ করে]

বা, $15x = 40$

বা, $x = \frac{40}{15}$ [দুই পক্ষে 15 দিয়ে ভাগ করে]

বা, $x = \frac{8}{3}$

এই সমাধানটিতে দেখা গেল যে,

কোনো একটি সমীকরণ সমাধান করার সময় সমীকরণটির কোনো রাশি বা পদ ডান পক্ষ থেকে বামপক্ষ অথবা বামপক্ষ থেকে ডানপক্ষে নেওয়ার সময় সেগুলির চিহ্নের পরিবর্তন ঘটে। অর্থাৎ—

যোগ (+)-এর স্থানে বিয়োগ (–) ও বিয়োগের (–) স্থানে যোগ (+) হয়।

একই ভাবে যেকোনো সমীকরণের রাশি বা পদগুলির চিহ্নের পরিবর্তন করে বামপক্ষ থেকে ডানপক্ষে এবং ডানপক্ষ থেকে বামপক্ষে পক্ষান্তর করে সমাধান বের করা প্রক্রিয়াটিকে **পক্ষান্তরের দ্বারা সমাধান (Solution by transposition)** হিসেবে চিহ্নিত করা হয়।

কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে পক্ষান্তর প্রক্রিয়াটি ভালো করে বুঝে নেই এসো।

উদাহরণ 11 ঃ সমাধান করো $2(x-3) = \frac{3}{5}(x+4)$

সমাধান ঃ $2(x-3) = \frac{3}{5}(x+4)$

বা, $5 \times 2\,(x-3) = 3\,(x+4)$

বা, $10\,(x-3) = 3(x+4)$

বা, $10x - 30 = 3x + 12$

বা, $10x - 3x = 12 + 30$

বা, $7x = 42$

বা, $x = \frac{42}{7}$

বা, $x = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 6$

সত্যাপন ঃ

বামপক্ষ $= 2(x-3)$
$= 2(6-3)$
$= 2 \times 3$
$= 6$

ডান পক্ষ $= \frac{3}{5}(x+4)$
$= \frac{3}{5}(6+4)$
$= \frac{3}{5} \times 10 = 3 \times 2 = 6$

$\therefore$ বাম পক্ষ = ডান পক্ষ

$\therefore$ $x = 6$, প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান।

উদাহৰণ 12 ঃ সমাধান করো $\frac{y}{5}+\frac{y-2}{3}=2$

সমাধান ঃ $\frac{y}{5}+\frac{y-2}{3}=2$

বা, $\frac{3\times y}{3\times 5}+\frac{5\times(y-2)}{5\times 3}=2$

বা, $\frac{3y+5(y-2)}{15}=2$

বা, $3y + 5(y-2) = 2 \times 15$

বা, $3y + 5y - 10 = 30$

বা, $8y - 10 = 30$

বা, $8y = 30 + 10$

বা, $y = \frac{40}{8}$

বা, $y = 5$

কার্য উপরের উদাহরণটির সত্যতা (Verification) প্রমাণ করো।

উদাহৰণ 13 ঃ সমাধান করো $\frac{2}{3}a = \frac{3}{8}a + \frac{7}{12}$

সমাধান ঃ দুইপক্ষকে 24 দিয়ে গুণ করো

বা, $24 \times \frac{2}{3}a = 24 \times \frac{3}{8}a + 24 \times \frac{7}{12}$ [24 হচ্ছে 3, 8 এবং 12র ল সা গু]

বা, $8 \times 2a = 3 \times 3a + 2 \times 7$

বা, $16a = 9a + 14$

বা, $16a - 9a = 14$

বা, $7a = 14$

বা, $a = \frac{14}{7}$

অথবা, $a = 2$

উদাহৰণ 14 ঃ সমাধান করো $2-\frac{1}{3}\left[3x-3-\frac{1}{4}\{7x+7-(5x-5)\}\right] = 11-2x$

সমাধান ঃ প্রথমে বন্ধনী উঠিয়ে নেই এসো

$$2-\frac{1}{3}\left[3x-3-\frac{1}{4}\{7x+7-(5x-5)\}\right] = 11-2x$$

বা, $2-\frac{1}{3}\left[3x-3-\frac{1}{4}\{7x+7-5x+5\}\right]=11-2x$

বা, $2-\frac{1}{3}\left[3x-3-\frac{1}{4}\{2x+12\}\right]=11-2x$

বা, $2-\frac{1}{3}\left[3x-3-\frac{1}{2}x-3\right]=11-2x$

বা, $2-\frac{1}{3}\left[3x-\frac{1}{2}x-3-3\right]=11-2x$

বা, $2-\frac{1}{3}\left[\frac{5}{2}x\text{-}6\right]=11\text{-}2x$

বা, $2-\frac{5}{6}x+2=11-2x$

বা, $-\frac{5}{6}x+4=1\ \ -2x$

বা, $-\frac{5}{6}x+2x=1\ \ -4$

বা, $\left(-\frac{5}{6}+2\right)x=7$

বা, $\left(\frac{-5+12}{6}\right)x=7$

বা, $\frac{7}{6}x=7$

বা, $x=7\div\frac{7}{6}$

বা, $x=7\times\frac{6}{7}$

বা, $x=6$

উদাহরণ 15 ঃ সমাধান করো $\frac{5x+4}{2x-10}=\frac{3}{7}$

সমাধান ঃ $(2x-10)$ রাশিকে বামপক্ষ থেকে ডানপক্ষে পক্ষান্তর করো।

$$5x+4=(2x-10)\times\frac{3}{7}$$

7কে বামপক্ষে পক্ষান্তর করে

বা, $7 \times (5x + 4) = (2x - 10) \times 3$

বা, $35x + 28 = 6x - 30$

বা, $35x = 6x - 30 - 28$

বা, $35x = 6x - 58$

বা, $35x - 6x = - 58$

বা, $29x = - 58$

বা, $x = -\dfrac{58}{29}$

$x = - 2$

2.4 বজ্রগুণন প্রক্রিয়ার সাহায্যেও একে সরাসরি পেতে পারি (Application of 'Cross-multiplication' process

তোমরা এর আগে সমানুপাতে পেয়েছে যে $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ হলে $ad = bc$ হয়। ঠিক একই ভাবে বীজগাণিতিক রাশির ক্ষেত্রেও আমরা এভাবে পেতে পারি $\dfrac{A}{B} \times \dfrac{C}{D}$ বা, AD = BC । তখন উপরের সমীকরণ $\dfrac{5x+4}{2x-10} = \dfrac{3}{7}$ থেকে সরাসরি $7(5x+4) = 3(2x-10)$ লিখে সমাধান করতে পারি। এই প্রক্রিয়াটিকে বজ্রগুণন প্রক্রিয়া (Cross-multiplication process) বলা হয়।

উদাহৰণ 16 ঃ সমাধান করো $\dfrac{8p-5}{2p-3} = \dfrac{2}{3}$

সমাধান ঃ $\dfrac{8p-5}{2p-3} = \dfrac{2}{3}$

বা, $3 \times (8p - 5) = 2 \times (2p - 3)$ [বজ্রগুণন প্রক্রিয়ার সহায্যে]

বা, $24p - 15 = 4p - 6$

বা, $24p - 4p = - 6 + 15$ [15 ও $4p$ পক্ষান্তর করে]

বা, $20p = 9$

বা, $p = \dfrac{9}{20}$

অনুশীলনী 2.1

1. নীচের সমীকরণগুলি সমাধান করো ঃ

(i) $4x + 5 = 21$ (ii) $17y - 3 = 48$ (iii) $-8 + 2x = -4$

(iv) $\frac{6x}{7} = 42$ (v) $\frac{6y}{11} = \frac{54}{99}$ (vi) $3x = 180 + 6x$

(vii) $2x + 3 = x + 4$ (viii) $2 - 5x = 3x - 9$ (ix) $5(p - 3) = 3(p + 2)$

(x) $\frac{3}{4y} = -9$ (xi) $\frac{4x}{5} + 1 = \frac{7}{15}$ (xii) $\frac{17x}{3} - \frac{16}{9} = 2$

2. নীচের প্রতিটি সমীকরণের সঙ্গে চলকের কিছু মান দেওয়া হয়েছে। এই মানগুলির মধ্যে কোন মানটি সমীকরণটির সমাধান হবে নির্ণয় করো।

(i) $2x - 4 = 0; x = 1, 2, -2$ (ii) $11y + 5 = -6; y = 0, 1, -1$

(iii) $\frac{3y}{5} = 3; y = 3, -3, 5$ (iv) $x + 5 = 7 - x; x = 1, -1, 2$

(v) $2x + \frac{1}{3} = 1; x = \frac{1}{-2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ (vi) $10p - 4 = 4(2p + 1); p = 2, 4, -4$

3. নীচের সমীকরণগুলি সমাধান করো ও ফলাফল শুদ্ধ হয়েছে কি না দেখো (Verify your result) ঃ

(i) $\frac{x}{3} - \frac{x-1}{2} = 1$ (ii) $\frac{n}{6} - \frac{2}{3} = \frac{n}{3} + \frac{5}{6}$

(iii) $2x + 7 - \frac{6x}{5} = 10 - \frac{5x}{2}$ (iv) $\frac{2y}{5} - \frac{3}{2} = \frac{y}{2} + 1$

(v) $\frac{x}{7} + \frac{x-4}{3} = 2$ (vi) $\frac{2x + (3x+1) + (4x+2)}{3} = 13$

(vii) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-1}{5} = \frac{2x-3}{5}$ (viii) $0.25(5x - 4) = 0.05(10x - 5)$

(ix) $0.5y + \frac{5y}{6} = 21 + 0.75y$ (x) $\frac{10x+7}{4x} = 2$

(xi) $\frac{x-9}{x-4} = \frac{2}{3}$ (xii) $\frac{2y-3}{2y} = -\frac{1}{8}$

(xiii) $\frac{p}{2p+6} = \frac{3}{8}$ (xiv) $\frac{5x+2}{6x-2} = \frac{2}{3}$

(xv) $\frac{3(2+x) - 5(2x-3)}{5-3x} = 9$ (xvi) $\frac{0.4b-2}{1.5b+15} = \frac{2}{3}$

2.5 একটি চলকের এক ঘাতের সমীকরণের প্রয়োগ (Application of first degree equation in one variable)

একটি চলকের সমীকরণ গঠন করে বাস্তব পরিস্থিতির সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত কতগুলি সমস্যা কীভাবে সমাধান করা যেতে পারে জেনে নেই এসো।

উদাহরণ 1 ঃ একটি সংখ্যার 5 গুণের সঙ্গে 10 যোগ করলে যোগফল 65 হয়। সংখ্যাটি কী?

সমাধান ঃ ধরা হ'ল সংখ্যাটি x

সংখ্যাটির 5 গুণ $= 5x$

এর সঙ্গে 10 যোগ করলে আমরা পাব $(5x + 10)$

প্রশ্নমতে $(5x + 10)$ হচ্ছে 65 এর সমান।

অতএব আমরা সমীকরণটি এভাবে লিখতে পারি।

$$5x + 10 = 65$$

x এর মান বের করতে এবার সমীকরণটি সমাধান করতে হবে।

$5x + 10 = 65$

বা, $5x = 65 - 10$

বা, $5x = 55$

বা, $x = 11$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি হচ্ছে 11

উদাহরণ 2 ঃ বাবার বর্তমান বয়স কবিতার বয়সের 4 গুণ। 8 বছর পর দুজনের বয়সের সমষ্টি হবে 86 বছর। দুজনের বর্তমান বয়স নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ ধরা হল কবিতার বর্তমান বয়স $= x$ বছর

$\therefore$ বাবার বর্তমান বয়স $= 4x$ বছর

8 বছর পর কবিতার বয়স হবে $= (x + 8)$ বছর

এবং বাবার বয়স হবে $= (4x + 8)$ বছর

প্রশ্নমতে, $(x + 8) + (4x + 8) = 86$

বা, $x + 8 + 4x + 8 = 86$

বা, $x + 4x + 8 + 8 = 86$

বা, $5x + 16 = 86$

বা, $5x = 86 - 16$

বা, $5x = 70$

বা, $x = \dfrac{70}{5}$

অথবা $x = 14$

$\therefore$ কবিতার বর্তমান বয়স হচ্ছে 14 বছর

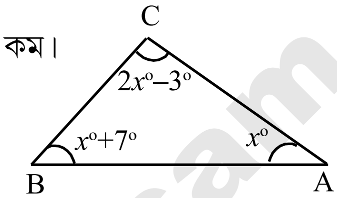
এবং বাবার বর্তমান বয়স হচ্ছে $4 \times 14 = 56$ বছর।

উদাহরণ 3 ঃ ABC ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি $\angle A$ কোণের মাপের চেয়ে 7° বেশি এবং $\angle C$ কোণের মাপ $\angle A$ কোণের মাপের দ্বিগুণের চেয়ে 3° কম। তিনটি কোণেরই মাপ বের করো।

সমাধান ঃ ধরা হ'ল, $\angle A$ কোণের মাপ $= x^\circ$

$\therefore$ $\angle B$ কোণের মাপ $= x^\circ + 7^\circ$

$\angle C$ কোণের মাপ $\angle A$ কোণের মাপের দ্বিগুণের চেয়ে 3° কম।



$\therefore$ $\angle C$ কোণের মাপ $= 2x^\circ - 3^\circ$

ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 180°

$\therefore$ $x + (x + 7) + (2x - 3) = 180$

বা, $x + x + 7 + 2x - 3 = 180$

বা, $x + x + 2x + 7 - 3 = 180$

বা, $4x + 4 = 180$

বা, $4x = 180 - 4$

বা, $4x = 176$

বা, $x = \frac{176}{4}$

বা, $x = 44$

$\therefore$ $\angle A$ কোণের মাপ $= 44^\circ$

$\angle B$ কোণের মাপ $= x^\circ + 7^\circ$
$= 44^\circ + 7^\circ$
$= 51^\circ$

এবং $\angle C$ কোণের মাপ $= 2x^\circ - 3^\circ$
$= 2 \times 44^\circ - 3^\circ$
$= 88^\circ - 3^\circ$
$= 85^\circ$

উদাহরণ 4 ঃ দুই অংকবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্ক দুটির যোগফল 5 । যদি অঙ্ক দুটির স্থান পরিবর্তন করা হয়, তবে যে নতুন সংখ্যাটি পাওয়া গেল সেটা মূল সংখ্যা থেকে 27 বেশি। মূল সংখ্যাটি বের করো।

সমাধান ঃ ধরা হল, এককের ঘরের অঙ্কটি x

$\therefore$ দশকের ঘরের অঙ্কটি হল $= 5 - x$

সংখ্যাটি হবে $= 10 \times (5 - x) + x$

মনে করো
$54 = 5 \times 10 + 4$
$95 = 9 \times 10 + 5$

অঙ্ক দুটির স্থান পরিবর্তন করলে নতুন সংখ্যাটি হবে $10 \times x + (5 - x)$

দেওয়া আছে, নতুন সংখ্যাটি মূল সংখ্যা থেকে 27 বেশি।

$\therefore$ $10 \times (5 - x) + x + 27 = 10 \times x + (5 - x)$

বা, $50 - 10x + x + 27 = 10x + 5 - x$

বা, $-9x - 9x = 5 - 77$

বা, $-18x = -72$

বা, $x = \dfrac{72}{18}$

বা, $x = 4$

$\therefore$ এককের ঘরের অঙ্কটি হল 4

এবং দশকের ঘরের অঙ্কটি হল $5 - 4 = 1$

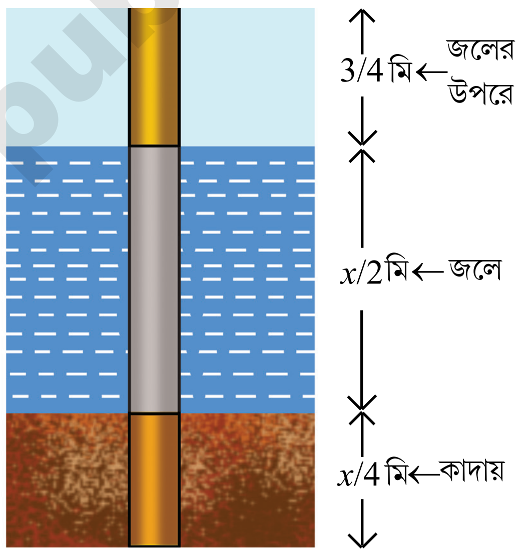
$\therefore$ মূল সংখ্যাটি হল $= 1 \times 10 + 4$

$= 10 + 4$

$= 14$

উদাহরণ 5 ঃ একটি দণ্ডের $\dfrac{1}{4}$ অংশ কাদায়, অর্ধেক অংশ জলে এবং 0.75 মিটার জলের ওপরে আছে। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ ধরা হল দণ্ডটির দৈর্ঘ্য $= x$ মিটার



$\therefore$ কাদায় থাকা অংশ $= \dfrac{x}{4}$ মিটার

জলে থাকা অংশ $= \dfrac{x}{2}$ মিটার

এবং জলের উপরে থাকা অংশ = 0.75 মিটার

$= \dfrac{75}{100}$ মিটার

$= \dfrac{3}{4}$ মিটার

প্রশ্নমতে, $\dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4} = x$

বা, $\dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{2} - x = -\dfrac{3}{4}$

বা, $\dfrac{x + 2x - 4x}{4} = -\dfrac{3}{4}$

বা, $\dfrac{-x}{4} = -\dfrac{3}{4}$

বা, $\frac{-x}{4} \times (-4) = -\frac{3}{4} \times (-4)$

বা, $x = 3$

$\therefore$ দণ্ডটির দৈর্ঘ্য $= 3$ মিটার

উদাহরণ 6 ঃ দুই বোন অলি ও মিলির বর্তমান বয়সের অনুপাত $5 : 4$। এখন থেকে 6 বছর আগে তাদের বয়সের অনুপাত ছিল $3 : 2$। তাদের বর্তমান বয়স কত হবে বের করো।

সমাধান ঃ ধরা হল অলি ও মিলির বর্তমান বয়স ক্রমে $5x$ বছর ও $4x$ বছর।

6 বছর আগে অলির বয়স ছিল $(5x - 6)$ বছর

6 বছর আগে মিলির বয়স ছিল $(4x - 6)$ বছর

যেহেতু তাদের বয়সের অনুপাত 6 বছর আগে $3 : 2$, সুতরাং আমরা নীচের সমীকরণটি গঠন করতে পারি।

$$\frac{5x-6}{4x-6} = \frac{3}{2}$$

বা, $2(5x - 6) = 3(4x - 6)$

বা, $10x - 12 = 12x - 18$

বা, $10x = 12x - 18 + 12$

বা, $10x - 12x = -6$

বা, $-2x = -6$

বা, $2x = 6$ [দুই পক্ষকেই (-1) দিয়ে গুণ করে]

অথবা $x = \frac{6}{2} = 3$

$\therefore$ অলির বর্তমান বয়স হচ্ছে $= (5 \times 3)$ বছর $= 15$ বছর

মিলির বর্তমান বয়স হচ্ছে $= (4 \times 3)$ বছর $= 12$ বছর

উদাহরণ 7 ঃ একটি ভগ্নাংশের লব হরের চেয়ে 5 বেশি। যদি লব ও হর উভয়ের সঙ্গে 4 যোগ করা হয়, তবে ভগ্নাংশটি হবে $\frac{6}{5}$। সমীকরণ গঠন করে ভগ্নাংশটি বের করো।

সমাধান ঃ ধরা হ'ল,

ভগ্নাংশটির হর $= x$

$\therefore$ ভগ্নাংশটির লব $= x + 5$

$\therefore$ ভগ্নাংশটি হবে $= \frac{x+5}{x}$

লব ও হর উভয়ের সঙ্গে 4 যোগ করলে ভগ্নাংশটি হবে $\frac{6}{5}$

$\therefore$ আমরা যে ভগ্নাংশটি গঠন করতে চলেছি সেটা হবে এরকম—

$$\frac{x+5+4}{x+4} = \frac{6}{5}$$

অথবা, $\dfrac{x+9}{x+4} = \dfrac{6}{5}$

বা, $5(x + 9) = 6(x + 4)$

বা, $5x + 45 = 6x + 24$

বা, $5x - 6x = 24 - 45$

বা, $-x = -21$

অথবা, $x = 21$

$\therefore$ ভগ্নাংশের হর $= 21$

ও ভগ্নাংশের লব $= x + 5 = 21 + 5 = 26$

$\therefore$ ভগ্নাংশটি হচ্ছে $= \dfrac{26}{21}$

আমার (x) সাংখ্যিক মান বলো

আমি একটি সংখ্যা 'x'

100 আমার তিন গুণের চেয়ে 7 বেশি। অর্থাৎ 100 হল $(3x + 7)$

26 হচ্ছে 150 থেকে আমার 4 গুণ কম। অর্থাৎ 26 হল $(150 - 4x)$

79 আমার 5 গুণের আধার চেয়ে $\dfrac{3}{2}$ বেশি। অর্থাৎ 79 হল $\left(\dfrac{5x}{2} + \dfrac{3}{2}\right)$

অনুশীলনী 2.2

সমাধান করো ঃ

1. দুটি সংখ্যা 5 : 7 অনুপাতে আছে। বড় সংখ্যাটির চেয়ে ছোট সংখ্যাটি 12 কম। সংখ্যা দুটি বের করো।
2. তিনটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যার যোগফল 48। সংখ্যাগুলো বের করো।
3. যদি তিনজন মানুষকে 17500 টাকা 1 : 2 : 4 অনুপাতে ভাগ করে দেওয়া হয়, তবে প্রত্যেকে কত টাকা করে পাবে?
4. একটি আয়তাকার মাঠের পরিসীমা 280 মিটার ও এর দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ থেকে 2 মিটার বেশি। মাঠের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বের করো।
5. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যায় এককের স্থানে রয়েছে 5। সংখ্যাটি অঙ্ক দুটির যোগফলের 5 গুণ হলে সংখ্যাটি নির্ণয় করো।
6. একটি বিষমবাহু ত্রিভুজের প্রথম বাহু তৃতীয় বাহু থেকে 2 সে মি বেশি এবং দ্বিতীয় বাহু তৃতীয় বাহুর দ্বিগুণের চেয়ে 5 সে মি কম। ত্রিভুজটির পরিসীমা যদি 29 সে মি হয়, তিনটি বাহুর মাপ কত হবে বের করো।
7. একটি সংখ্যার ছয়গুণ হচ্ছে সংখ্যাটির সঙ্গে 12 যোগ করে পাওয়া যোগফলের তিনগুলের সমান। সংখ্যাটি কত বের করো।
8. তিনটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল 45। সংখ্যাগুলি বের করো।
9. ঊর্ধ্বক্রমে থাকা তিনটি ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যাকে ক্রমে 2, 3 এবং 4 দিয়ে গুণ করলে যে সংখ্যাগুলো পাওয়া যায় তার যোগফল 119। সংখ্যাগুলো কত হবে বের করো।
10. 20 বছর পর স্মিতার বয়স বর্তমান বয়সের 5 গুণের চেয়ে 4 বছর কম হবে। স্মিতার বর্তমান বয়স কত?
11. রাজের বর্তমান বয়স রশ্মির বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ। দশ বছর আগে তার বয়স রশ্মির বয়সের তিনগুণ ছিল। তাদের বর্তমান বয়স বের করো।
12. রানু 500 টাকা নিয়ে কাছের একটি দোকানে খুচরো করতে গেল। দোকানদার তাকে কয়েকটি 50 টাকা ও কতগুলি 20 টাকা মোট 19 টি মোট দিলেন। রানু প্রত্যেকটির কতগুলি করে নোট পেল?
13. একটি নাটকে শিশুর জন্য প্রতিটি টিকেটের মূল্য 100 টাকা ও প্রাপ্তঃবয়স্ক লোকদের জন্য 250 টাকা। 50 জন ব্যক্তির থেকে সর্বমোট 8600 টাকা সংগ্রহ করা হল। তাদের মধ্যে শিশুর সংখ্যা কত।
14. একটি সংখ্যার $\frac{4}{5}$ অংশ সংখ্যাটির $\frac{2}{3}$ অংশ থেকে 6 বেশি। সংখ্যাটি কত?
15. এমন একটি পরিমেয় সংখ্যা বের করো যাকে $\frac{4}{3}$ দিয়ে গুণ করে পাওয়া গুণফল থেকে $\frac{2}{5}$ বিয়োগ করলে $-\frac{8}{15}$ পাবে।
16. দুটি বাস 575 কি মি দূরত্বের দুটি স্থান থেকে পরস্পর পরস্পরের দিকে যাত্রা শুরু করল। একটি বাসের বেগ প্রতি ঘণ্টায় 60 কি মি এবং অন্যাটির 55 কি মি। বাস দুটি মুখোমুখি হতে কত সময় লাগবে।

17. একজন মানুষ তার হাতের মোট টাকার $\frac{1}{4}$ অংশ দিয়ে সব্জি, $\frac{3}{5}$ অংশ দিয়ে ফল-মূল এবং $\frac{1}{8}$ অংশ দিয়ে মিস্টি কিনলেন। এরপর হাতে অবশিষ্ট 8 টাকা বাস ভাড়া দিল। তিনি মোট কত টাকা বাজারে নিয়ে গিয়েছিলেন।
18. এমন একটি ভগ্নাংশ বের করো যেখানে হর লবের চেয়ে 4 বেশি। যদি লবের সঙ্গে 6 যোগ এবং হরের সঙ্গে 6 বিয়োগ করো তবে ভগ্নাংশটি $\frac{11}{3}$ হবে।
19. একটি পরিমেয় সংখ্যার হর লবের চেয়ে 5 বেশি। যদি লবের 1 এবং হরের 3 কমিয়ে দেওয়া হয়, তবে নতুন পরিমেয় সংখ্যা দাঁড়ায় $\frac{1}{4}$। পরিমেয় সংখ্যাটি বের করো।
20. রোহনের চেয়ে ওর মা 25 বছর বড়। 8 বছর পর রোহন ও তার মায়ের বয়সের অনুপাত হবে 4 : 9। দুজনের বর্তমান বয়স বের করো।
21. মনদীপ 8% লাভে একটি গাড়ি রক্তিমকে বিক্রি করল। গাড়িটি মেরামতি করতে রক্তিমের খরচ হল 5400 টাকা। তারপর 113400 টাকায় কোনো লাভ লোকসান ছাড়াই সে সেটা বিক্রি করল নৃপেনকে। মনদীপ গাড়িটি কত দামে কিনেছিল।
22. বিদ্যালয় সপ্তাহে একটি স্কুলের মোট ছাত্রের এক পঞ্চমাংশ 100 মিটার দৌড়ে এবং এক তৃতীয়াংশ 200 মিটার দৌড়ে অংশগ্রহণ করেছে। 200 মিটার এবং 100 মিটার দৌড়ে অংশগ্রহণ করা ছাত্রের পার্থক্যের দ্বিগুণের সমান ছাত্র 4 × 100 মিটার দৌড়ে অংশগ্রহণ করেছে। বাকি 15 জন ছাত্র খেলা উপভোগ করেছে। মাঠে মোট কতজন ছাত্র রয়েছে?

Multiple Choice Questions (MCQ)

শুদ্ধ উত্তরটি বেছে বের করো .

1. নীচের সমীকরণগুলির মধ্যে এক চলকের এক ঘাতের সমীকরণটি হচ্ছে

   (a) $\frac{2}{x}=\frac{x}{2}$ (b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=1$ (c) $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=\frac{1}{4}$ (d) $x^2+2x-5=c$

2. 'একটি সংখ্যা থেকে 15 যোগ করলে সংখ্যাটি দাঁড়ায় 40।' এই উক্তির সমীকরণটি হচ্ছে

   (a) $15x = 40$ (b) $x - 15 = 40$ (c) $x + 15 = 40$ (d) $\frac{x}{15}=40$

3. 'একটি সংখ্যা থেকে 8 বিয়োগ করলে সংখ্যাটি – 15 হয়'। এই উক্তির সমীকরণটি হচ্ছে

   (a) $x + 8 = -15$ (b) $x - 8 = 15$ (c) $x + 8 = 15$ (d) $x - 8 = -15$

4. $x \div 4 = 8$ এর বীজটি হল

   (a) 12 (b) 32 (c) 4 (d) – 12

5. $8x - \frac{20}{7} = 4x$ র বীজটি হল

(a) $-\frac{5}{7}$ (b) $\frac{5}{7}$ (c) $\frac{10}{7}$ (d) $\frac{20}{21}$

6. $x = 0$ র বীজটি হবে

(a) 0 (b) 4 (c) 2 (d) কোনো বীজ নাই

7. y একটি অযুগ্ম সংখ্যা। y র ঠিক আগের অযুগ্ম সংখ্যাটি হল

(a) $y-1$ (b) $y-2$ (c) $y-3$ (d) $y-4$

8. দুই অঙ্কযুক্ত একটি সংখ্যার এককের ঘরের অঙ্কটি 4 এবং দশকের অঙ্কটি যদি y হয়, তবে সংখ্যাটি হল

(a) $10y-4$ (b) $10-40y$ (c) $10+40y$ (d) $10y+4$

9. সমীকরণ $8x - 15 = 9 - 4x$ এর বীজ হল

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

10. $\frac{5x}{3} = 30$ হলে x এর মান হল

(a) 15 (b) 9 (c) 18 (d) 12

11. 'কোনো একটি সংখ্যার $\frac{2}{3}$ অংশ তার $\frac{3}{4}$ অংশ থেকে 5 কম'। এই উক্তির সমীকরণটি হল

(a) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x = 5$ (b) $\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}x - 5$ (c) $\frac{2}{3}x - 5 = \frac{3}{4}x$ (d) $\frac{3}{4}x - 5 = -\frac{2}{3}x$

12. এক জোড়া পূরক কোণের একটি কোণ অন্য কোণ থেকে 20^{o} বেশি। ছোট কোণটির মাপ হল—

(a) 90^{o} (b) 45^{o} (c) 55^{o} (d) 35^{o}

13. এক জোড়া সম্পূরক কোণের বড় কোণটি ছোট কোণের দ্বিগুণ। বড় কোণটি হল—

(a) 180^{o} (b) 120^{o} (c) 90^{o} (d) 60^{o}

14. $bx = 0$ হলে x -এর মান হবে

(a) 0 (b) b (c) – b (d) $\frac{1}{b}$

15. $\frac{m}{2} = -7$ হলে x -এর মান হবে

(a) 9 (b) –9 (c) –14 (d) 14

শিক্ষকের সাহায্য নিয়ে এটা সমাধান করে বিষয়টা উপভোগ করো

বর্তমান নলবাড়ি জেলার বেলশরের দণ্ডিরাম দত্ত নামক একজন ব্যক্তি একশ বছর পূর্বে (1918 খ্রী) অসমের বিভিন্ন স্থান ঘুরে ঘুরে অসমিয়া 'কৌতুক ও কাইথেলি অঙ্ক' নামে একটি গ্রন্থ প্রকাশ করেছিলেন। সেখান থেকে একটি অঙ্ক তুলে ধরা হল যেটা থেকে একটি সরল সমীকরণ হয়। তাঁর সংগৃহীত অঙ্কটি হচ্ছে—

'কোথায় যাচ্ছ-হে একশ ভাই? — আমরা তো একশ নই। এসেছি যত আসবে তত আরো আসবে তার আধা, তারপর আসবে তার আধা শেষে তোমরা সঙ্গে একশ হব'।

আমরা কী শিখলাম?

1. একটি সমীকরণের চলকের কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্য বাম পক্ষ ও ডান পক্ষ সমান হয়। সেই নির্দিষ্ট মানটিকেই উক্ত সমীকরণটির বীজ বা মূল (Root) বলা হয়।
2. সমীকরণ করতে গিয়ে চলকবিশিষ্ট রাশিগুলি সমতার বাম পক্ষে রেখে অন্য রাশিগুলি সমতার ডান পক্ষে পক্ষান্তর করা হয়। তার জন্য প্রয়োজন অনুসারে আমরা নীচের যেকোনো প্রক্রিয়ার সাহায্য নেই—
   (i) দুই পক্ষে একই সংখ্যা যোগ
   (ii) দুই পক্ষে থেকে একই সংখ্যা বিয়োগ
   (iii) দুইপক্ষকে একই সংখ্যা দিয়ে গুণ
   (iv) দুই পক্ষকে একই অশূন্য সংখ্যা দিয়ে ভাগ
3. সমীকরণ সমাধা করার সময় উপরের প্রক্রিয়াগুলি ব্যবহার না করে সহজাত প্রয়োজন সাপেক্ষে সমীকরণে থাকা রাশি বা পদসমূহের চিহ্নের পরিবর্তন করে বাম পক্ষ থেকে ডান পক্ষে এবং ডান পক্ষ থেকে বাম পক্ষে পক্ষান্তর করতে পারি। এইভাবে পদ বা রাশি পক্ষান্তর করলে ধনাত্মক রাশি বা পদটি ঋণাত্মক হয় এবং ঋণাত্মক রাশি বা পদটি ধনাত্মক হয়।
4. বজ্রগুণন প্রক্রিয়ার দ্বারা সমীকরণ সমাধান, যদি $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ তবে $A\times D=B\times C$, এখানে A, B, C ও D একটি সমীকরণের পদ বা রাশি।
5. এক ঘাতের সমীকরণ গঠন করে দৈনন্দিন জীবনে সম্মুখীন হওয়া বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারি।

❑❑❑

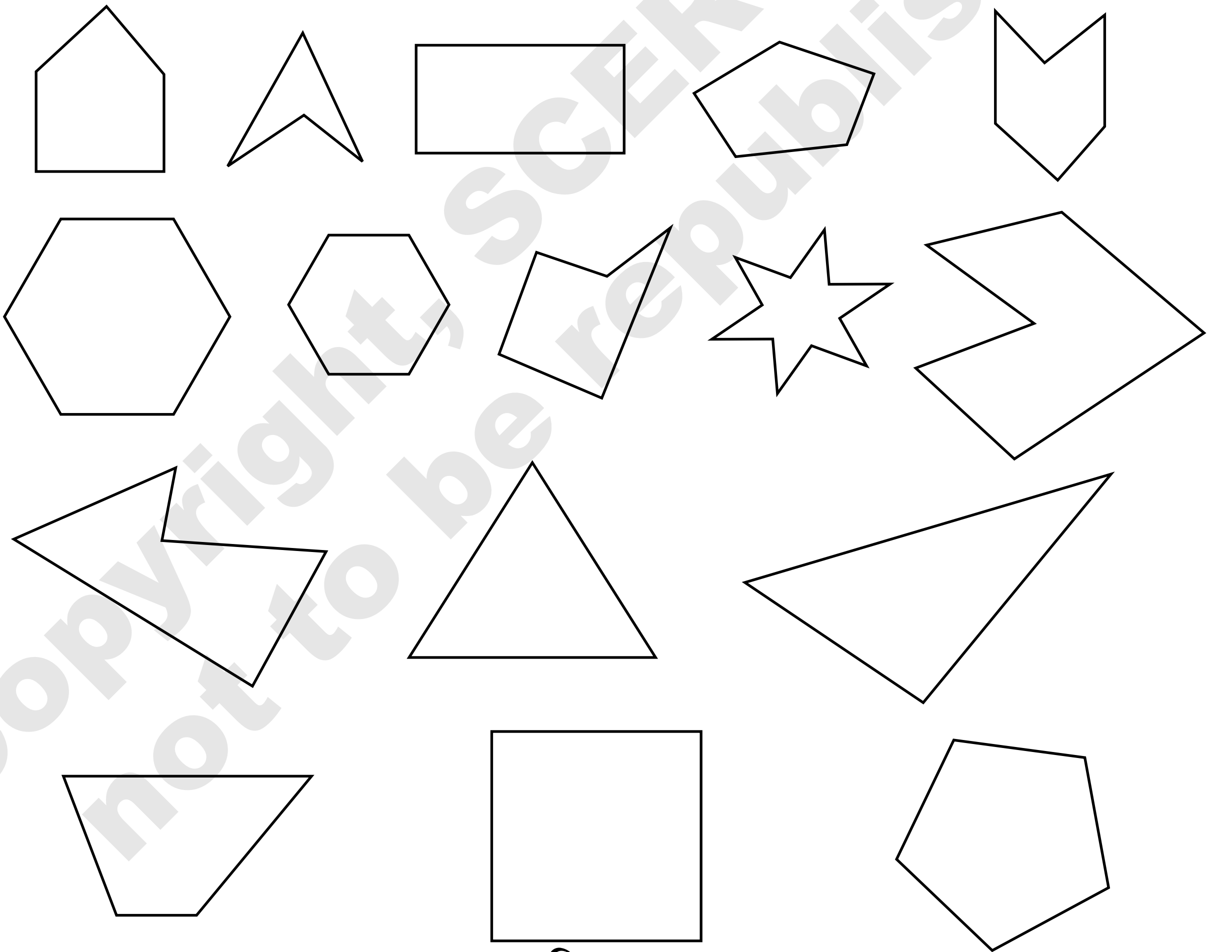
অধ্যায়-3

চতুর্ভুজ
(Quadrilaterals)

তোমরা ত্রিভুজ সম্পর্কে আগেই জেনেছ। ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ থাকে।

আমরা এই অধ্যায়ে তিনটির চেয়ে বেশি রেখার দ্বারা গঠিত সরল বন্ধ চিত্রের (figure) বিষয়ে আলোচনা করব। নীচের ছবিগুলি একটু লক্ষ্য করো —

3.1 বহুভুজ (Polygons) ঃ



চিত্র - 3.1

ছবিগুলিতে কী দেখলে?

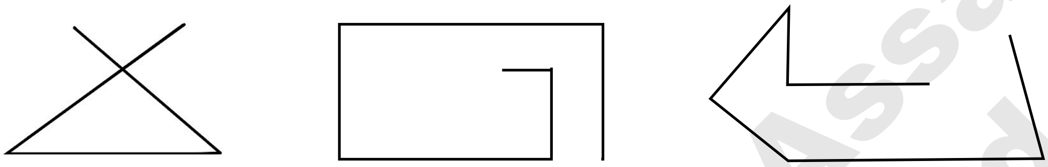
— চিত্রগুলো সমতলীয়।

— চিত্রগুলো রেখাখণ্ড দিয়ে গঠিত এবং রেখার সংখ্যা সসীম।

— চিত্রগুলো সরল এবং বন্ধ।

এভাবে সসীম সংখ্যক রেখাখণ্ড দ্বারা গঠিত একটি সরল বন্ধ সমতলীয় চিত্রকে বহুভূজ (Polygon) বলা হয়।

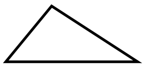
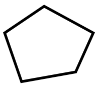
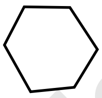
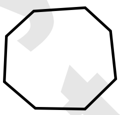
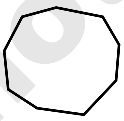
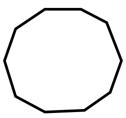
নীচের ছবিগুলি বহুভুজ নয় কারণ (i) ছবিটি সরল নয়। অন্যদিকে (ii) ও (iii) ছবিদুটি বন্ধ নয়।



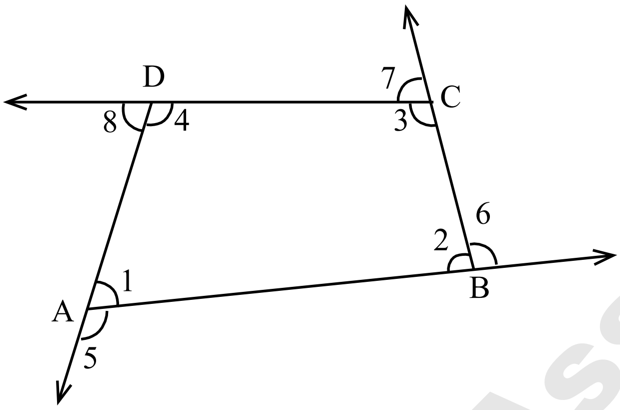
(i) (ii) (iii)

3.2 বহুভুজের নামকরণ (Classification of polygons)

বহুভুজগুলির বাহুর সংখ্যা বা শীর্ষবিন্দুর সংখ্যা অনুসারে নামকরণ করা যেতে পারে —

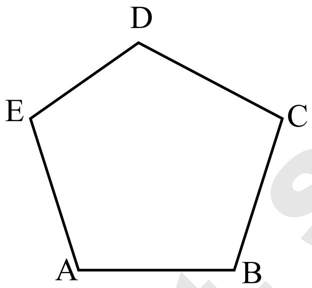
চিত্র	বাহু/শীর্ষবিন্দুর সংখ্যা	নাম
	3	ত্রিভুজ (Triangle)
	4	চতুর্ভুজ (Quadrilateral)
	5	পঞ্চভুজ (Pentagon)
	6	ষড়ভুজ (Hexagon)
	7	সপ্তভুজ (Heptagon)
	8	অষ্টভুজ (Octagon)
	9	নবভুজ (Nonagon)
	10	দশভুজ (Decagon)

3.3 বহুভুজের অন্তঃকোণ/বহিঃকোণ (Interior/Exterior angles of a polygon)

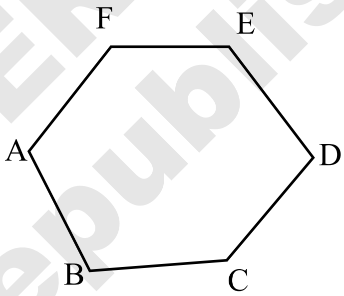


ABCD চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রে $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ এবং $\angle 4$ অন্তঃকোণ ও $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$ ও $\angle 8$ বহিঃকোণ।

কার্য নীচে দেওয়া পঞ্চভুজ ও ষড়ভুজের অন্তঃকোণ ও বহিঃকোণগুলি বের করো। প্রয়োজন সাপেক্ষে যে কোনো বাহু বাড়িয়ে নিতে পার।

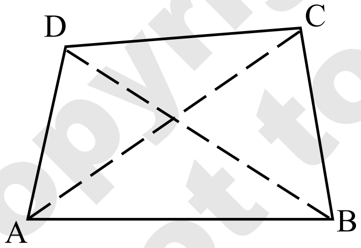


পঞ্চভুজ

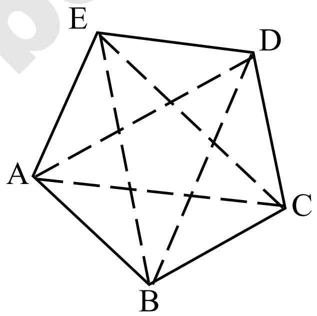


ষড়ভুজ

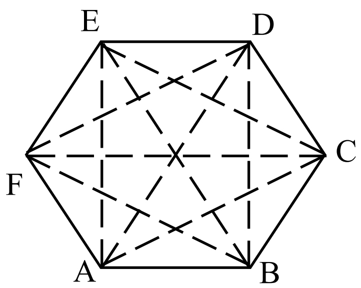
3.4 বহুভুজের কর্ণ (Diagonals of polygon)



ABCD চতুর্ভুজের A ও C শীর্ষবিন্দু সংযোগ করে AC এবং B ও D শীর্ষবিন্দু সংযোগ করে BD চতুর্ভুজটির কর্ণ পাওয়া যায়।



ABCDE পঞ্চভুজের AC, AD, BE, BD, EC রেখাখণ্ডগুলি পঞ্চভুজটির কর্ণ।

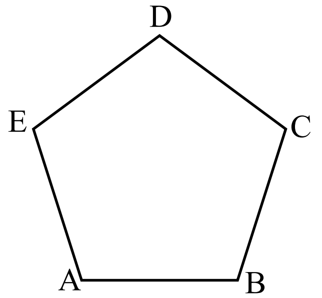


ABCDEF ষড়ভুজের AC, AD, AE, BF, BE, BD, CF, CE, DF রেখাখণ্ডগুলি ষড়ভুজটির কর্ণ।

উপরের ছবিগুলি লক্ষ্য করলে আমরা বুঝতে পারি যে বহুভুজের সন্নিহিত নয় এমন দুটি শীর্ষবিন্দুকে সংযোগ করে পাওয়া রেখাখণ্ডগুলি বহুভুজের কর্ণ।

3.5 বহুভুজের সন্নিহিত বাহু ও সন্নিহিত কোণ (Adjacent sides, adjacent angles of a polygon)

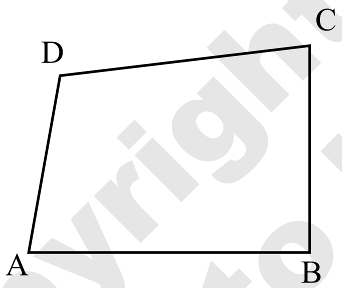
তোমরা আগের পাঠগুলিতে পেয়েছ যে একটি সাধারণ বাহুবিশিষ্ট দুটি কোণকে **সন্নিহিত কোণ (Adjacent Angle)** বলা হয়। বহুভুজের ক্ষেত্রে একটি সাধারণ বাহুবিশিষ্ট দুটি কোণকে সন্নিহিত কোণ হিসেবে ধরা হয়। একইভাবে একটি সাধারণ কৌণিক বিন্দু থাকা দুটি বাহুকে বহুভুজের **সন্নিহিত বাহু (Adjacent Side)** হিসেবে ধরা হয়।

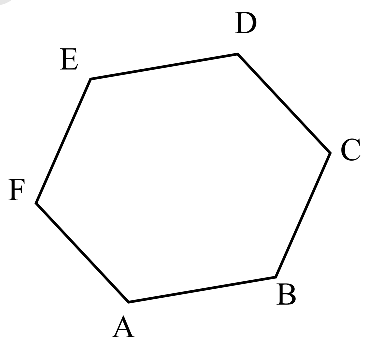


একটি বহুভুজের দ্বারা একটি বাহু যেখানে শেষ হয় সেখানে অন্য একটি বাহু আরম্ভ হয়। সেই দুটি বাহু সন্নিহিত বাহু। পাশের ছবিটিতে AB ও BC সন্নিহিত বাহু, BC ও CD ; CD ও DE ; DE ও EA ; EA ও AB সন্নিহিত বাহু। একই বাহুর প্রান্তের কোণগুলিকে সন্নিহিত কোণ বলে। পাশের ছবিটিতে $\angle A$ ও $\angle B$, $\angle B$ ও $\angle C$, $\angle C$ ও $\angle D$, $\angle D$ ও $\angle E$, $\angle E$ ও $\angle A$ যথাক্রমে সন্নিহিত কোণ।

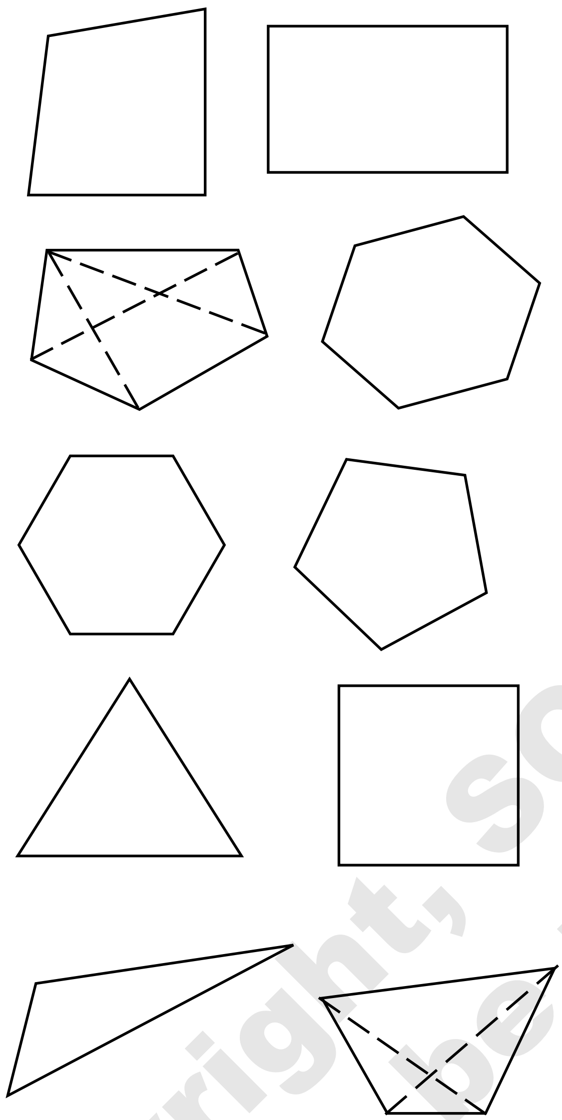
নিজে চেষ্টা করো (Try yourself)

নীচের চতুর্ভুজ ও ষড়ভুজ দুটির সন্নিহিত বাহু ও সন্নিহিত কোণের জোড়াগুলি চিহ্নিত করো।



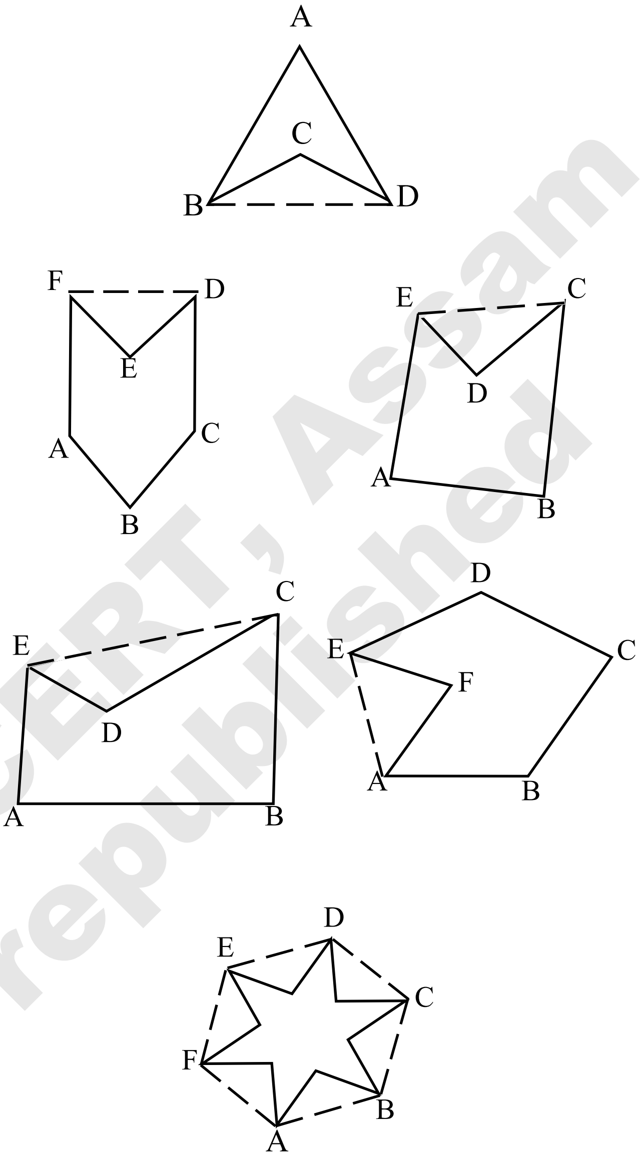


3.6 উত্তল বহুভুজ ও অবতল বহুভুজ (Convex and concave polygon)



চিত্র 3 (a)

উত্তল বহুভুজ **(Convex polygon)**



চিত্র 3 (b)

অবতল বহুভুজ **(Concave polygon)**

উত্তল বহুভুজ (Convex polygon)

☆ অন্তঃকোণের মান 180° থেকে কম।

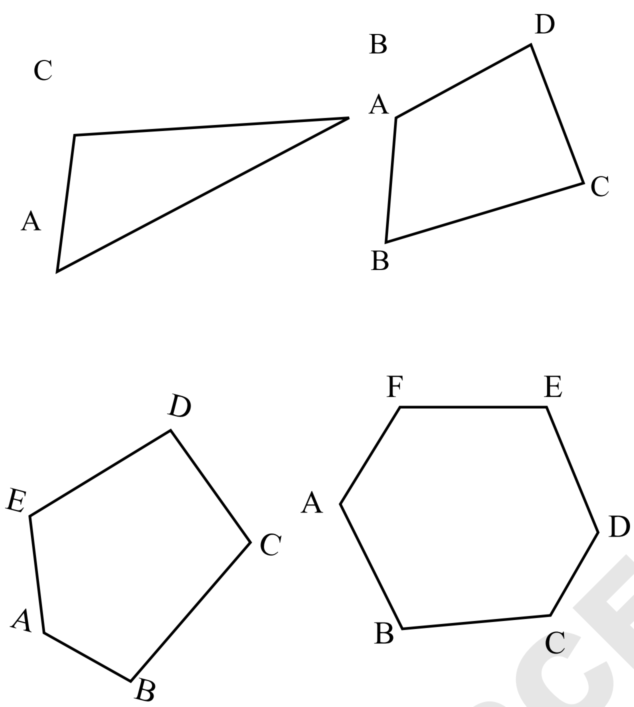
☆ কর্ণ বহুভুজের ভিতরের দিকে থাকবে।

অবতল বহুভুজ (Concave polygon)

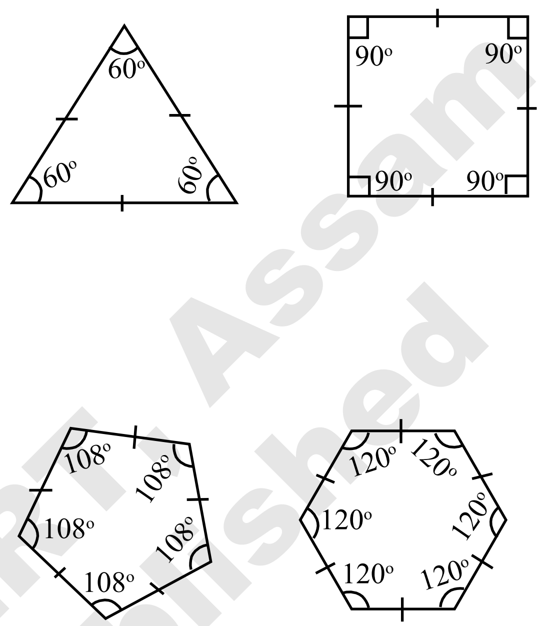
☆ কমেও একটি অন্তঃকোণের মান 180° থেকে বেশি হবে।

☆ কমেও একটি কর্ণ বাইরের দিকে থাকবে।

আবার চিত্র 3 (a) এর উত্তল বহুভুজগুলিকেও আমরা বিশেষ ধর্ম অনুসারে নামকরণ করতে পারি। লক্ষ্য করবে—



এই উত্তল বহুভুজগুলিতে বাহুর দৈর্ঘ্য অসমান ও অন্তঃ কোণগুলিও সমান নয়। এগুলিকে **বিষমবাহু বহুভুজ (Irregular polygon)** বলা হয়।



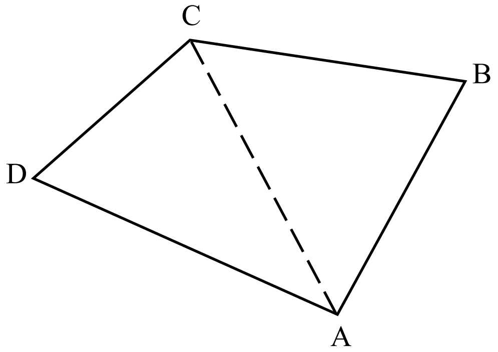
এই উত্তল বহুভুজগুলির প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান ও প্রতিটি কোণের মানও সমান। এজাতীয় উত্তল বহুভুজকে সুষম বহুভুজ **(Regular polygon)** বলা হয়।

আমরা এই অধ্যায়ের পরবর্তী আলোচনায় বহুভুজ বলতে উত্তল বহুভুজগুলিকেই বোঝাব।

3.7 বহুভুজের কোণের মাপের সমষ্টি (Sum of the measure of angles of a polygon)

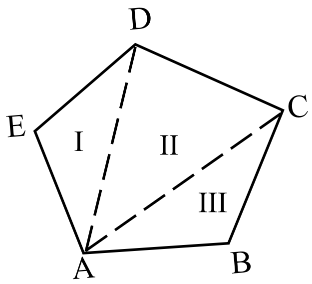
ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 180°। এবার, ত্রিভুজের কোণের এই ধর্ম ব্যবহার করে যেকোনো বহুভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি বের করব। লক্ষ্য করো —

1. চতুর্ভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি —



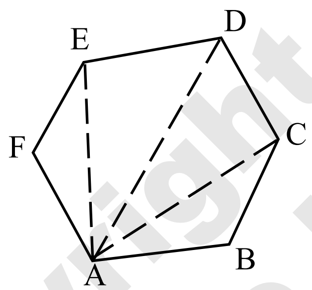
ABCD চতুর্ভুজের AC কর্ণ চতুর্ভুজটিকে দুটি ত্রিভুজ ADC ও ABC তে বিভক্ত করেছে। অতএব ABCD চতুর্ভুজের আন্তঃকোণের সমষ্টি = ADC ত্রিভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি + ABC ত্রিভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি = $180^{o} + 180^{o} = 360^{o}$

2. পঞ্চভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি



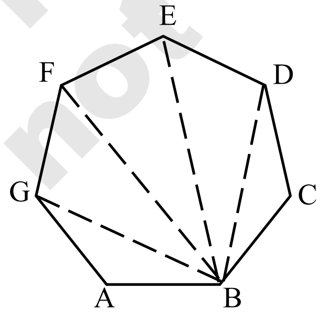
ABCDE পঞ্চভুজটিতে A বিন্দু থেকে টানা কর্ণ AD ও AC পঞ্চভুজটিকে AED, ADC ও ABC তিনটি ত্রিভুজে বিভক্ত করেছে। ফলে পঞ্চভুজ ABCDE র অন্তঃকোণের সমষ্টি = তিনটি ত্রিভুজের অন্তঃকোণর সমষ্টি $= 180^{o} + 180^{o} + 180^{o} = 3 \times 180^{o} = 540^{o}$

3. ষড়ভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি



ABCDEF ষড়ভুজটিতে A বিন্দু থেকে টাকা কর্ণ AE, AD, AC ষড়ভুজটিকে AFE, AED, ADC, ACB এই চারটি ত্রিভুজের দ্বারা বিভক্ত করেছে। ফলে ABCDEF ষড়ভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি = $180^{o} + 180^{o} + 180^{o} + 180^{o} = 4 \times 180^{o} = 720^{o}$

4. সপ্তভুজের অন্তঃকোর্ণের সমষ্টি



ABCDEFG সপ্তভুজটিতে B বিন্দু থেকে টানা চারটি কর্ণ BD, BE, BF এবং BG সপ্তভুজটিকে পাঁচটি ত্রিভুজের দ্বারা বিভক্ত করেছে। ফলে সপ্তভুজটির অন্তঃ কোণের সমষ্টি $= 5 \times 180^{o} = 900^{o}$ (কেন?)

কার্য একইভাবে অষ্টভুজ, নবভুজ, দশভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি বের করো।

এবার বহুভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টির একটি নমুনা (Pattern) বানানোর চেষ্টা করব, যা বহুভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টির সূত্র হিসেবে ব্যবহার করা যাবে। কোনো একটি বহুভুজে যতগুলি বাহুই থাকুক না কেন সেটার অন্তঃকোণের সমষ্টি বের করা সম্ভব হবে।

বহুভুজ	বাহুর সংখ্যা	অন্তঃকোণের সমষ্টি	নমুনা
ত্রিভুজ	3	180°	$(3-2)\times 180^\circ$
চতুর্ভুজ	4	360°	$(4-2)\times 180^\circ$
পঞ্চভুজ	5	540°	$(5-2)\times 180^\circ$
ষড়ভুজ	6	720°	$(6-2)\times 180^\circ$
সপ্তভুজ	7	900°	$(7-2)\times 180^\circ$
অষ্টভুজ	8	”	”
নবভুজ	9	”	”
দশভুজ	10	”	”
n বাহু সম্পন্ন বহুভুজ	n	.....	$(n-2)\times 180^\circ$ $= (n-2)\times 2\times 90^\circ$ $= (2n-4)\times 90^\circ$

অতএব একটি n বাহু সম্পন্ন বহুভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি $(2n-4)\times 90^\circ$ হবে।

যদি বহুভুজটি সুষম হয় তবে প্রতিটি

অন্তঃকোণের মাপ $\left(\frac{2n-4}{n}\right)\times 90^\circ$

[$\because$ n বাহু সম্পন্ন বহুভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি $(2n-4)\times 90^\circ$ ও সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রে কোণের মাপ সমান। তাই সুষম বহুভুজের প্রতিটি অন্তঃকোণের মাপ $\left(\frac{2n-4}{n}\right)\times 90^\circ$]

উদাহরণ 1 ঃ 12 টা বাহু সম্পন্ন একটি সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি বের করো।

সমাধান ঃ $n = 12$, ফলে অন্তঃকোণের সমষ্টি $(2\times 12-4)\times 90^\circ = 1800^\circ$

উদাহরণ 2 ঃ 15 টা বাহু বিশিষ্ট একটি বহুভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি 2340° হলে বহুভুজটির প্রতিটি অন্তঃকোণের মাপ বের করো।

সমাধান ঃ

অন্তঃকোণের সমষ্টি $= 2340^\circ$

বাহুর সংখ্যা $= 15$

অতএব প্রতিটি অন্তঃকোণের মাপ $= \frac{2340^\circ}{15}$

$= 156^\circ$

উদাহৰণ 3 ঃ একটি সুষম বহুভুজের প্রতিটি অন্তঃকোণের মাপ 160^o হলে বহুভুজের বাহুর সংখ্যা বের করো।

সমাধান ঃ ধরা হল বহুভুজটির বাহুর সংখ্যা $= n$

$\therefore$ অন্তঃকোণের সমষ্টি $= (2n - 4) \times 90^o$

প্রতিটি অন্তঃকোণের মাপ $= \left(\frac{2n-4}{n}\right) \times 90^o$

প্রশ্ন মতে, $\left(\frac{2n-4}{n}\right) \times 90^o = 160^o$

বা $\left(\frac{2n-4}{n}\right) = \frac{160}{90}$

বা $18n - 36 = 16n$

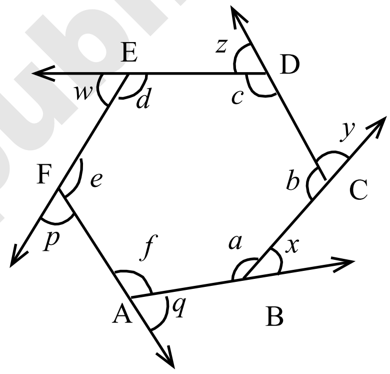
বা $2n = 36$

বা $n = 18$

বাহুর সংখ্যা $= 18$

3.8 বহুভুজের বহিঃকোণের মাপের সমষ্টি (Sum of the measure of the exterior angles)

আমরা এবার একটি বিশেষ বহুভুজ যেমন ষড়ভুজের বহিঃকোণের সমষ্টি মাপার চেষ্টা করব। ABCDEF একটি ষড়ভুজ। ষড়ভুজটির বহিঃকোণটির সমষ্টি অর্থাৎ $\angle x + \angle y + \angle z + \angle w + \angle p + \angle q$ কত?



বহুভুজটি আঁকতে $\overrightarrow{AB}$ র দিকে গতি করে B বিন্দুতে $\overrightarrow{BC}$ র দিকে গতি করার সময় আমরা $\angle x$ কোণ ঘুরে C বিন্দুতে উপনিত হই। তারপর আবার $\angle y$ কোণ ঘুরে D বিন্দুতে পৌঁছাই, আবার $\angle z$ কোণ ঘুরে E বিন্দুতে, $\angle w$ কোণ ঘুরে F বিন্দুতে, $\angle p$ কোণ ঘুরে A বিন্দুতে পৌঁছে $\angle q$ কোণ ঘুরলে তবেই $\overrightarrow{AB}$ র দিকে আবার ঘুরে আসব, তাই না? অর্থাৎ 360^o কোণ ঘোরা হল কি না? $\overrightarrow{AB}$ কে বাড়িয়ে দেওয়ায় $\overline{BC}$ র সঙ্গে x বহিঃকোণ উৎপন্ন হল। একইভাবে বহিঃকোণ y, z, w, p ও q পাওয়া গেল। অতএব, $\angle x + \angle y + \angle z + \angle w + \angle p + \angle q = 360^o$।

অন্যভাবে,

$\angle x + \angle y + \angle z + \angle w + \angle p + \angle q$

$= 180^0 - \angle a + 180^0 - \angle b + 180^0 - \angle c + 180^0 - \angle d + 180^0 - \angle e + 180^0 - \angle f$

$= 1080^0 - (\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e + \angle f)$

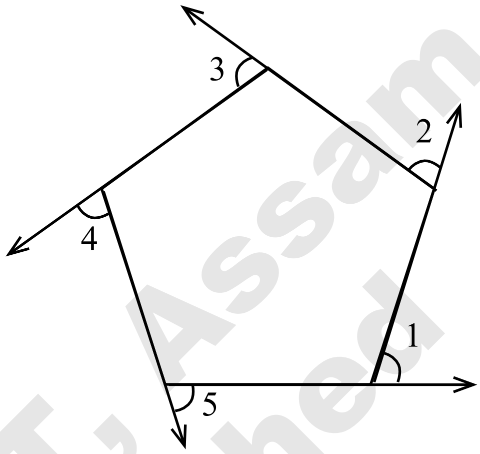
$= 1080^0 - (6 - 2) \times 180^0$

$= 1080^0 - 720^0 = 360^0$

অতএব $\angle x + \angle y + \angle z + \angle w + \angle p + \angle q = 360^{o}$। বহুভুজটির বাহুর সংখ্যা যাই হোক না কেন **যেকোনো বহুভুজের বহিঃকোণের সমষ্টি 360^{o}**।

কার্য একটি সুষম বহুভুজের প্রতিটি বহিঃকোণ সমান কি না সেটা নীচের প্রশ্নগুলির মাধ্যমে পরীক্ষা করো।

1. পাশের সুষম পঞ্জভুজের প্রতিটি অন্তঃকোণের পরিমাণ কত হবে?
2. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5$ হবে কি? কেন?
3. প্রতিটি বহিঃকোণের মাপ কত হবে?



উদাহরণ 5 ঃ একটি সুষম বহুভুজের বাহুর সংখ্যা নির্ণয় করো যার প্রতিটি বহিঃস্থ কোণের মাপ 36^{o}।

সমাধান ঃ সবগুলি বহিঃকোণের মাপের সমষ্টি $= 360^{o}$

প্রতিটি বহিঃকোণ $= 36^{o}$

$\therefore$ বহিঃকোণের সংখ্যা $= \dfrac{360}{36} = 10$

$\therefore$ বহুভুজটির বাহুর সংখ্যা $= 10$

উদাহরণ 6 ঃ এমন একটি সুষম বহুভুজ পাওয়া যাবে কি যায় প্রতিটি বহিঃস্থ কোণের মাপ

(i) 24^{o} (ii) 22^{o} (iii) 40^{o}

সমাধান ঃ (i) বহিঃস্থ কোণের মাপের সমষ্টি $= 360^{o}$

প্রতিটি বহিঃকোণ $= 24^{o}$

বহিঃকোণর সংখ্যা $= \dfrac{360}{24} = 15$

সুষম বহুভুজ পেতে পারি এবং বাহুর সংখ্যা $= 15$

(ii) বহিঃস্থ কোণের মাপের সমষ্টি $= 360^{o}$

প্রতিটি বহিঃকোণ $= 22^{o}$

বহিঃকোণের সংখ্যা $= \dfrac{360}{22} = 16.36$

বহিঃকোণের সংখ্যা দশমিক সংখ্যা হতে পারে না।

(iii) একইভাবে করতে পারি।

উদাহৰণ 6 ঃ এমন সুষম বহুভুজ পাওয়া যেতে পারে কি যার প্রতিটি অন্তঃকোণের মাপ

(i) 24° (ii) 70° (iii) 135°

সমাধান ঃ (i) সুষম বহুভুজের প্রতিটি অন্তঃকোণের মাপ $= \left(\frac{2n-4}{n}\right) \times 90^{\circ}$ $n =$ বাহুসংখ্যা

$\therefore \left(\frac{2n-4}{n}\right) \times 90^{\circ} = 24$

বা, $\left(\frac{2n-4}{n}\right) = \frac{24}{90}$

বা, $180n - 360 = 24n$

বা, $156n = 360$

বা, $n = \frac{360}{156} = 2\frac{48}{156}$

কিন্তু বাহুর সংখ্যা ভগ্নাংশ হতে পারে না।

অতএব প্রতিটি অন্তঃকোণ 24° হয় এমন সুষম বহুভুজ সম্ভব নয়।

অথবা

প্রতিটি অন্তঃকোণ $= 24^{\circ}$

$\therefore$ বহিঃস্থকোণ $= 156^{\circ}$ যা 360°র ভাজক নয়, ফলে সুষম বহুভুজ পাওয়া যাবে না।

(ii) একইভাবে করতে পারি। (iii) একইভাবে করতে পারি।

উদাহৰণ 7 ঃ(i) একটি সুষম বহুভুজের সবচেয়ে ক্ষুদ্র অন্তঃস্থ কোণের মাপ কি হতে পারে এবং কেন?

(ii) একটি সুষম বহুভুজের সচচেয়ে বড় বহিঃকোণের মাপ কত হতে পারে এবং কেন?

সমাধান ঃ (i) যেহেতু সবচেয়ে কম সংখ্যক বাহু সম্পন্ন বহুভুজটি হল ত্রিভুজ। তাই সুষম ত্রিভুজ অর্থাৎ সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি অন্তঃকোণ 60° হচ্ছে একটি সুষম বহুভুজের সবচেয়ে ছোট অন্তঃকোণের পরিমাণ।

(ii) একই যুক্তিমতে সবচেয়ে বড় বহিঃকোণের মাপ 120°।

অনুশীলনী 3.1

1. নিম্নলিখিত বহুভুজগুলি আঁকো—

   (i) উত্তল ষড়ভুজ (ii) অবতল সপ্তভুজ (iii) অবতল পঞ্চভুজ

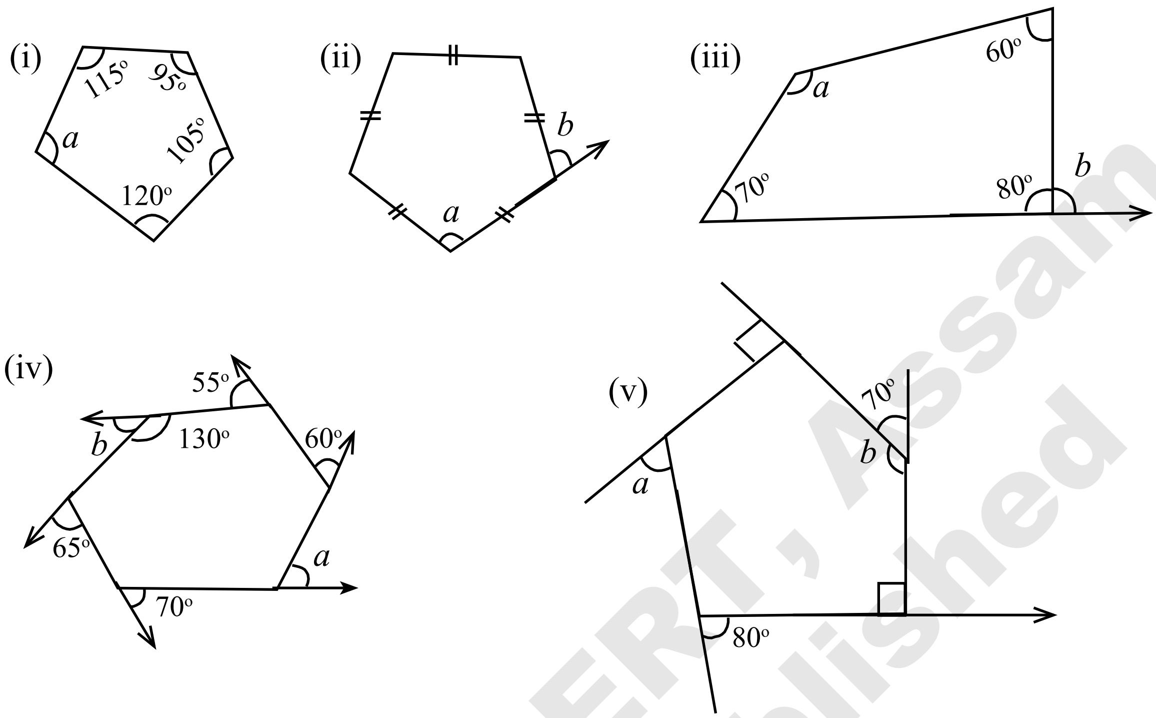
2. নিম্নলিখিত উত্তল বহুভুজগুলি আঁকো ও প্রত্যেকটির কর্ণ চিহ্নিত করে। কর্ণের মোট সংখ্যা লেখো —

   (i) সুষম ষড়ভুজ (ii) অষ্টভুজ (iii) নবভুজ (iv) দশভুজ

3. নিম্নলিখিত সুষম বহুভুজগুলি আঁকো, প্রতিটির কোণের সমষ্টি বের করো ও বহুভুজগুলির প্রতিটি কোণের পরিমাণ কত হবে বের করো।

   (i) সুষম ষড়ভুজ (ii) সুষম নবভুজ (iii) 12 সংখ্যক বাহু থাকা সুষম বহুভুজ

4. নীচের ছবিগুলোর a, b কোণের মাপ বের করো —



5. একটি সুষম বহুভুজের একটি বহিঃকোণের মাপ 30° হ'লে বহুভুজের বাহুসংখ্যা কত?
6. 20টা বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজের প্রতিটি বহিঃকোণের মাপ কত হবে?
7. নীচের এক-একটি সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণের মাপ দেওয়া রয়েছে। বহুভুজগুলির বাহুর সংখ্যা বের করো।

   (i) 120° (ii) 144° (iii) 156° (iv) 135° (v) 165°

8. নীচের সংখ্যাগুলি বহুভুজের বাহুর সংখ্যা হ'লে প্রতিটি বহুভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি বের করো।

   (i) 12 (ii) 14 (iii) 20 (iv) 24 (v) 25

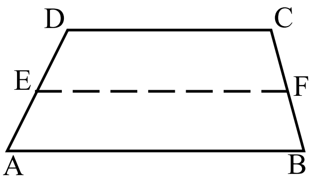
9. নীচের উক্তিগুলি শুদ্ধ না অশুদ্ধ যুক্তি সহকারে বিচার করো—
   (i) একটি সুষম বহুভুজের প্রতিটি বহিঃকোণের মাপ 25° হতে পারে না।
   (ii) একটি সুষম বহুভুজের প্রতিটি অন্তঃকোণের মাপ 1° হতে পারে।
   (iii) একটি সুষম বহুভুজের সবচেয়ে বড় বহিঃকোণ 90°
   (iv) একটি সুষম বহুভুজের সবচেয়ে বড় অন্তঃকোণ 180°
   (v) একটি সুষম বহুভুজের সবচেয়ে ছোট অন্তঃকোণ 60°

3.9 চতুর্ভুজের বিশেষ নামকরণ (Kinds of quadrilateral)

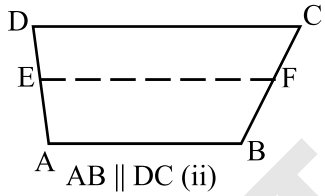
একটি চতুর্ভুজের বাহু ও কোণগুলির বিভিন্ন ধর্ম অনুসারে বিভিন্ন রকম নামকরণ করা হয়।

1. ট্র্যাপিজিয়াম (Trapezium)

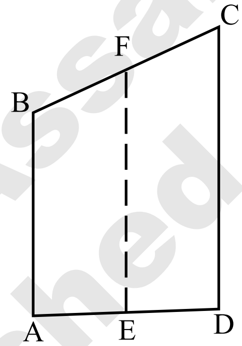
নীচের চতুর্ভুজগুলি ভাল করে লক্ষ্য করলে দেখবে যে চতুর্ভুজগুলির যেকোন এক জোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল—



AB || DC (i)



AB || DC (ii)



BA || CD (iii)

যে চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল সেই চতুর্ভুজকে ট্র্যাপিজিয়াম বলা হয়। সমান্তরাল বাহুদুটিকে ভূমি বাহু বলেও ধরা হয়।

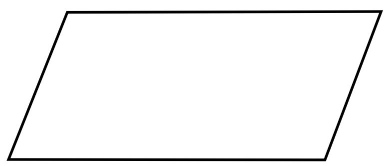
কার্য ঃ একটি ট্র্যাপিজিয়াম ABCD আঁকো

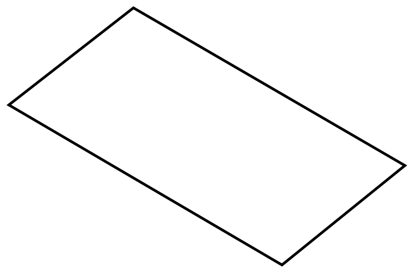
(i) কোণগুলি মেপে নাও। কোণগুলির মধ্যে কোনো সম্পর্ক বের করতে পারবে কি?

(ii) মেপে দেখো, $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$ হয় তো?

2. সামান্তরিক (Parallelogram)

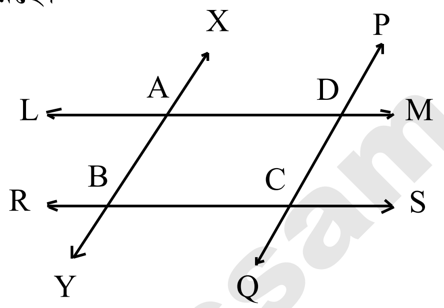
যে সমস্ত চতুর্ভুজের দুই জোড়া বিপরীত বাহুই সমান্তরাল সে ক্ষেত্রে চতুর্ভুজটিকে সামান্তরিক বলা হয়।





কার্য

পাশের ছবিটিতে LM ও RS একজোড়া সমান্তরাল রেখা। অন্য একজোড়া সমান্তরাল রেখা XY ও PQ- ছবিতে দেখানো অনুযায়ী A, B, C ও D বিন্দুতে কাটাকাটি হয়েছে।



ABCD কে সামান্তরিক বলা যাবে কি? এবার

(i) AB, BC, CD ও AD বাহুর দৈর্ঘ্য স্কেলের সাহায্যে মাপো ও খাতার লেখো। বাহুর মাপগুলির মধ্যে কোনো সম্বন্ধ খুঁজে পেলে কি?

(ii) কোণমাপক যন্ত্র অর্থাৎ চাঁদা (Protractor) ব্যবহার করে $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ও $\angle D$ র মাপ নাও ও খাতার লিখে রাখো।

(iii) $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ কোণগুলির মধ্যে কোনো সম্বন্ধ খুঁজে পেলে কি?

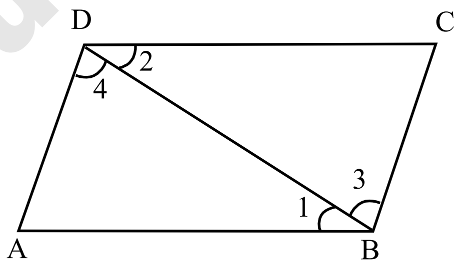
(iv) ABCD সামান্তরিকটির সন্নিহিত কোণগুলি খুঁজে বের করো এবং এই কোণগুলির মধ্যে যদি কোনো সম্বন্ধ থাকে তবে সেটা বের করার চেষ্টা করো।

3.9.2.1 সামান্তরিকের ধর্ম (Properties of parallelogram)

ধর্ম 1. সামান্তরিকের বিপরীত বাহু সমান (Opposite sides of a parallelogram are equal)

সত্যাপন ঃ ABCD সামান্তরিকের B ও D বিন্দু সংযোগ করে BD কর্ণ আঁকা হল।

AB || DC তাই $\angle 1 = \angle 2$ এবং AD || BC তাই $\angle 3 = \angle 4$ (একান্তর কোণ)



ΔABD ও ΔBDC তে

$\angle 1 = \angle 2$, BD হচ্ছে সাধারণ বাহু, $\angle 3 = \angle 4$

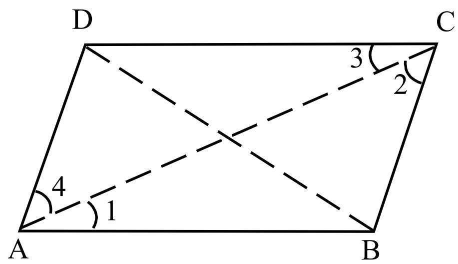
অতএব কোণ-বাহু-কোণ (ASA)

শর্ত মতে, $\Delta BAD \cong \Delta DCB$

অতএব AB = DC ও AD = BC

ধর্ম 2. সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলি সমান।
(The opposite angles of a parallelogram are of equal measure)

সত্যাপন ঃ ABCD সামান্তরিকের দুটি কর্ণ AC ও BD আঁকা হল।



$\therefore$ ΔABC ও ΔADC ত্রিভুজ দুটিতে

$\angle 1 = \angle 3$ [একান্তর কোণ]

AC বাহু হচ্ছে সাধারণ বাহু

$\angle 2 = \angle 4$ [একান্তর কোণ]

$\therefore$ কোণ-বাহু-কোণ শর্ত মতে (ASA)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$

$\therefore$ $\angle B = \angle D$ (সর্বাঙ্গসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ)

একইভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle A = \angle C$

লক্ষ্য করো ঃ তোমাদের আগের কার্যটিতে, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ হয়েছিল কি?

ধৰ্ম 3. **সামান্তৰিকৰ সন্নিহিত কোণগুলি সম্পূৰক (The adjacent angles in a parallelogram are suplementary)**

সত্যাপণ ঃ ABCD সামান্তৰিকে AB || DC এবং AD ছেদক

$\therefore$ $\angle A + \angle D = 180^{\circ}$

[সমান্তৰাল ৰেখাৰ ছেদকেৰ একই দিকে অবস্থিত অন্তঃ কোণগুলিৰ সমষ্টি180°]

অৰ্থাৎ $\angle A$ ও$\angle D$ কোণদুটি সম্পূৰক।

একই ভাবে প্ৰতিজোড়া সন্নিহিত কোণেৰ ক্ষেত্ৰে একটি অন্যটিৰ সম্পূৰক।

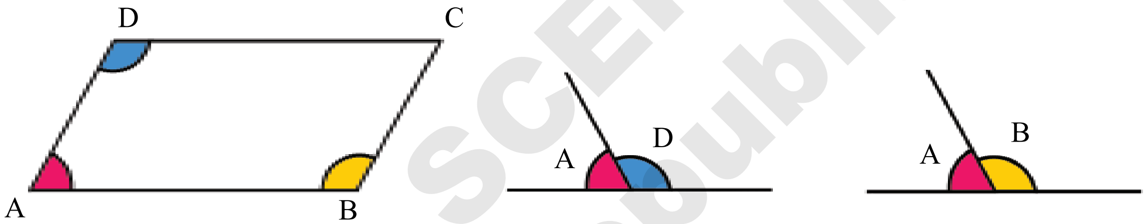
কাৰ্য

1. একটি কাগজ থেকে ABCD সামান্তৰিক কেটে নাও।

2. সামান্তৰিকটি থেকে A, B ও D কোণগুলি কেটে বেৰ কৰো। এবাৰ একটি সৰলৰেখাৰ A ও B মিলিয়ে এবং তাৰপৰ A ও D মিলিয়ে দেখো। কী পেলে?

$\angle A + \angle D = 180^{\circ}$

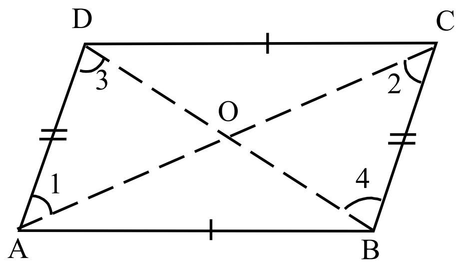
$\angle A + \angle B = 180^{\circ}$ তাই না?



ধৰ্ম 4. **সামান্তৰিকেৰ কৰ্ণগুলি তাদেৰ ছেদবিন্দুতে পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়।**

সত্যাপন ঃ ABCD সামান্তৰিকে AC ও BD কৰ্ণ O বিন্দুতে ছেদ কৰেছে।

দেখাতে হবে যে AO = CO এবং BO = DO



ΔAOD ও ΔBOC ত্ৰিভুজ দুটিৰ

$\angle 1 = \angle 2$ [একান্তৰ কোণ]

AD = BC [সামান্তৰিকেৰ বিপৰীত বাহু]

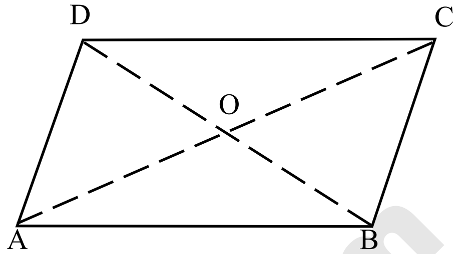
$\angle 3 = \angle 4$ [একান্তৰ কোণ]

অতএব কোণ-বাহু-কোণ শৰ্ত মতে

$\Delta AOD \cong \Delta BOC$

$\therefore$ AO = CO ও BO = DO

কার্য কাগজ থেকে ABCD কেটে নাও। AC ও BD কর্ণ দ্বারা সামান্তরিকটি ভাঁজ করো। দেখবে ভাঁজ দুটি একটি বিন্দুতে গিয়ে মিলেছে। এবার এই বিন্দুটি থেকে কৌণিক বিন্দুগুলির দৈর্ঘ্য মেপে কী পেলে আলোচনা করো।



সামান্তরিকের ধর্ম

(i) বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল ও সমান দৈর্ঘ্যের

(ii) বিপরীত কোণগুলি সমান মাপের

(iii) সন্নিহিত কোণগুলি সম্পূরক

(iv) সামান্তরিকের কর্ণদুটি তাদের ছেদবিন্দুতে পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত।

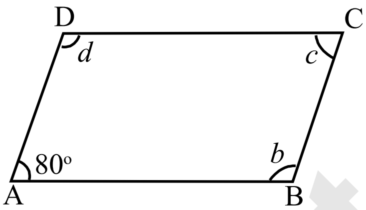
অন্যদের সঙ্গে আলোচনা করো (Discuss in group)

☆ একটি ট্র্যাপিজিয়াম সামান্তরিক হতে পারে কি?

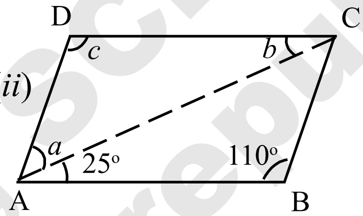
☆ একটি সামান্তরিক ট্র্যাপিজিয়াম হতে পারে কি?

উদাহরণ 8 ঃ নীচের সামান্তরিকগুলিতে অজ্ঞাত কোণগুলি ($a, b, c...$ ইত্যাদি) বের করো।

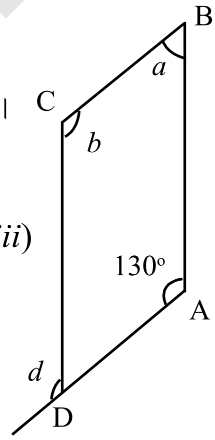
(*i*)



(*ii*)



(*iii*)



সমাধান ঃ (*i*) $80^\circ + b = 180^\circ$ (সন্নিহিত কোণ)

বা $b = 100^\circ$

$b + c = 180^\circ$

বা $c = 80^\circ$

একইভাবে, $d = b = 100^\circ$

সমাধান ঃ (*ii*) $a + 25^\circ + 110^\circ = 180^\circ$

বা $a = 45^\circ$

$\therefore 25^\circ + 45^\circ + c = 180^\circ$

বা $c = 110^\circ$

$b = 25^\circ$

সমাধান ঃ (*iii*) $\angle a + 130^\circ = 180^\circ$

বা $\angle a = 50^\circ$

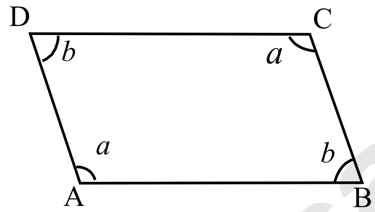
$\angle b = 130^\circ$

$\angle d = \angle DAB$ [অনুরূপ কোণ]

$\angle d = 130^\circ$

উদাহৰণ 9 ঃ একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত কোণের মাপের অনুপাত 5 : 4 হলে সামান্তরিকের প্রতিটি কোণের মাপ বের করো।

সমাধান ঃ শর্ত মতে, $\frac{a}{b} = \frac{5}{4} \quad \therefore a = \frac{5}{4}b$



এবার $a + b = 180$

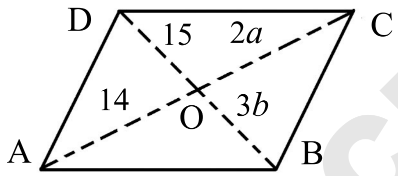
বা $\frac{5}{4}b + b = 180$

বা $\frac{9}{4}b = 180$

বা $b = \frac{180 \times 4}{9} = 80$

অতএব সামান্তরিকের কোণগুলি হবে $100^o, 80^o, 100^o, 80^o$

উদাহৰণ 10 ঃ নীচের ছবিতে সামান্তরিকের a, b অজ্ঞাত রাশির মান বের করো।



সমাধান ঃ $OB = 3b = 15 = OD$

$\therefore b = 5$

$OC = 2a = 14 = OA$

$\therefore a = 7$

উদাহৰণ 11 ঃ নীচের প্রশ্নসমূহের শর্তগুলি মেনে একটি সামান্তরিক আঁকা যাবে কি?

(i) AB = CD = 6 সে মি ও BC = AD = 4 সে মি

(ii) $\angle B = 80^o$ ও $\angle C = 90^o$ (iii) $\angle A = 60^o$ ও $\angle C = 70^o$

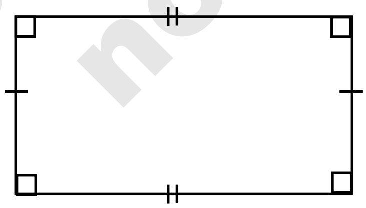
উত্তর ঃ (i) যাবে, কারণ বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান।

(ii) যাবে না, কারণ সামান্তরিকের সন্নিহিত কোণের ধর্মটি সিদ্ধ হয়নি।

(iii) যাবে না, কারণ সামান্তরিকের বিপরীত কোণের ধর্মটি সিদ্ধ হয়নি।

3.9.3 আয়ত (Rectangle)

যদি সামান্তরিকের সবগুলি কোণ সমান হয়, তবে সামান্তরিকটি একটি আয়ত হবে। এবার তাহলে প্রতিটি কোণের মাপ কত হতে পারে? যদি প্রত্যেকটি কোণের মাপ x বলে ধরে নেওয়া হয় তবে



$x + x + x + x = 360^o$

বা $4x = 360^o$

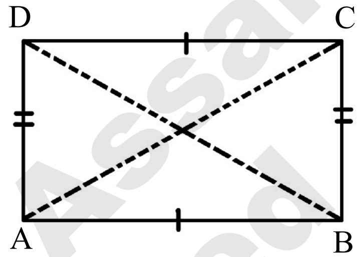
বা $x = 90^o$

অর্থাৎ আয়তের প্রতিটি কোণের মাপ 90° বা এক সমকোণের সমান। বিশেষভাবে বলতে গেলে একটি চতুর্ভুজের বিপরীত বাহু দুটি সমান, সমান্তরাল ও প্রত্যেকটি কোণ এক সমকোণ হলে চতুর্ভুজটিকে আয়ত বলা হয়।

অন্যদের সঙ্গে আলোচনা করো (i) সমস্ত সামান্তরিক আয়ত হবে কি?

(ii) সমস্ত আয়তই কি সামান্তরিক?

3.9.3.1 ধর্ম ঃ আয়তের কর্ণগুলির দৈর্ঘ্য সমান (Diagonals of a Rectangle are equal in length)



সত্যাপন ঃ একটি ABCD আয়তে AC ও BD কর্ণ আঁকা হয়েছে।

এবার ABC ও ABD ত্রিভুজ দুটিতে

AB সাধারণ বাহু

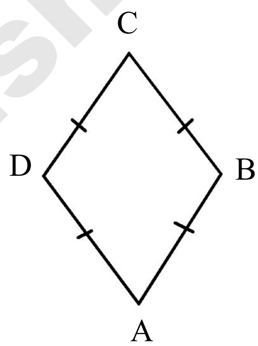
$\angle A = \angle B = 90^\circ$

BC = AD (বিপরীত বাহু)

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (বাহু-কোণ-বাহু শর্ত)

$\therefore$ AC = BD

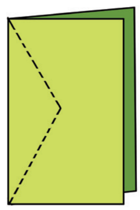
3.9.4 রম্বাস (Rhombus)



তোমরা আগেই পেয়েছ যে সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি সমান। যদি সামান্তরিকের সবগুলি বাহু সমান দৈর্ঘ্যের হয় তবে সেটাকে বলা হয় রম্বাস। জেনে রাখো যে সমান দৈর্ঘ্যর বাহু বিশিষ্ট একটি চতুর্ভুজও রম্বাস।

AB = BC = CD = DA

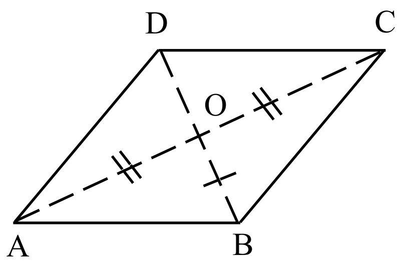
কার্য পাশের ছবিটিতে যেভাবে দেখানো হয়েছে সেভাবে একটি কাগজ ভাঁজ করো। এবার ভাজটির একদিকে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁকো। এরপর ভাজটির দুই দিকই যাতে ঠিক থাকে সেভাবে চিহ্নিত দাগ অনুযায়ী ত্রিভুজটি কেটে ফেলো। যে ত্রিভুজটি কাটা হল সেটা এবার মেলে দেখো। কী পেলে? একটি রম্বাস কি না?



সঙ্গীদের সঙ্গে আলোচনা করো (i) একটি সামান্তরিক রম্বাস হতে পারে কি?

(ii) একটি রম্বাস সামান্তরিক হতে পারে কি?

3.9.4.1 ধর্ম ঃ রম্বাসের দুটি কর্ণ পরস্পর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক (Diagonals of a Rhombus are perpendicular bisectors of each other)



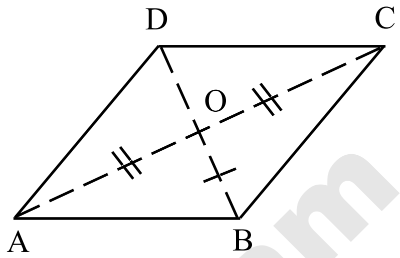
সত্যাপন ঃ ABCD একটি রম্বাস, এর AC ও BD কর্ণ। এদের ছেদবিন্দু O। দেখাতে হবে যে

AO = CO, BO = DO

ও $\angle AOB = \angle COB = 90^\circ$

আমরা জানি যে, একটি রম্বাস সামান্তরিক ও সামান্তরিকের দুটি কর্ণ পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত।

$\therefore$ $AO = CO$ ও $BO = DO$



এবার ΔAOB ও ΔBOC থেকে পাই

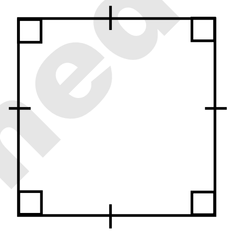
$AO = CO$, $AB = BC$ ও BO সাধারণ বাহু

$\therefore$ $\Delta AOB \cong \Delta COB$ [বাহু-বাহু-বাহু শর্ত মতে]

$\therefore$ $\angle AOB = \angle COB = 90^\circ$ ($\because$ $\angle AOC = 180^\circ$)

3.9.5 বর্গ (Square)

রম্বাসের সবগুলো কোণ সমান হলে বর্গ হয়। লক্ষ করো যে একটি সমান বাহুবিশিষ্ট আয়তকেও বর্গ বলতে পারি। একইভাবে একটি সামান্তরিকের বাহুগুলি ও কোণগুলি সমান হলেও বর্গ হয়। আবার একটি সুষম চতুর্ভুজকেও আমরা বর্গ বলতে পারি।



আয়তের মতো বর্গেরও কর্ণদুটির দৈর্ঘ্য সমান।

সঙ্গীদের সঙ্গে আলোচনা করো

(i) একটি বর্গ সামান্তরিক হতে পারে কি?

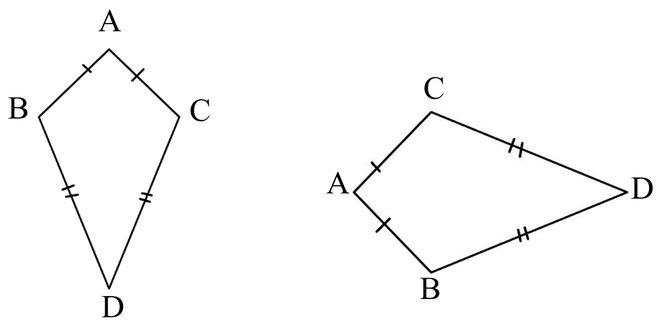
(ii) একটি বর্গ আয়ত হতে পারে কি?

3.9.5.1 ধর্ম ঃ বর্গের কর্ণগুলো পরস্পর লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। (নিজে সমাধান করো)

(Diagonals of a square are perpendicular bisectors of each other)

3.9.6 ঘুড়ি (Kite)

পাশের চতুর্ভজগুলি লক্ষ করো। চতুর্ভুজগুলিতে একইভাবে দাগ দিয়ে চিহ্নিত করা বাহুগুলি সমান। এইজাতীয় চতুর্ভুজগুলোকে ঘুড়ি বা কাইট বলা যেতে পারে।

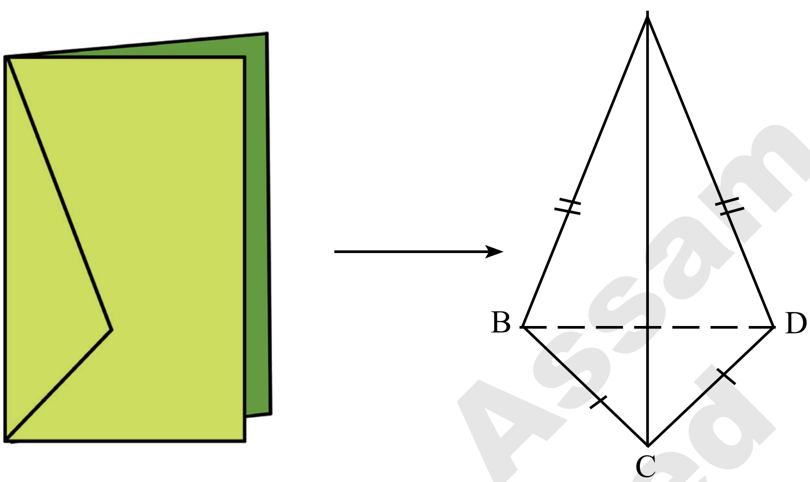


$AB = AC$

$BD = DC$

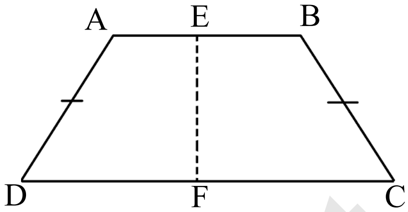
অন্যদের সঙ্গে আলোচনা করো একটি রম্বাস ঘুড়ি হতে পারে কি? ঘুড়ি কখনো রম্বাস হয় কি?

কার্য ঃ পাশের ছবিতে যেভাবে ভাঁজ দেখানো হয়েছে, সেভাবেই কাগজ কেটে ঘুড়ি বানাও।



AC ও BD কর্ণের মাপ নাও। এরা কি সমান? AC ও BD কর্ণদুটি ভাঁজ করে ত্রিকোণীর সাহায্যে দেখো যে কর্ণদুটি সমাকোণে কেটেছে কি না। AC কর্ণটি ঘুড়িটিকে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে ভাগ করেছে তো?

3.9.1.1 সমদ্বিবাহু ট্র্যাপিজিয়াম (Isosceles Trapezium)



আমরা এবার এক বিশেষ ট্র্যাপিজিয়ামের বিষয়ে আলোচনা করব। পাশের ট্র্যাপিজিয়ামটি লক্ষ করলে দেখবে যে অসমান্তরাল বাহু দুটি (AD ও BC) সমান দৈর্ঘ্যের। এই জাতীয় ট্র্যাপিজিয়ামকে সমদ্বিবাহু ট্র্যাপিজিয়াম বলো।

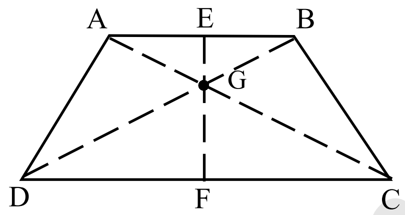
নিজে করো

1. একটি কাগজ কেটে ABCD (AD ও BC সমান দৈর্ঘ্যের) সমদ্বিবাহু ট্র্যাপিজিয়াম প্রস্তুত করো।
2. এবার B কে Aর উপরে রেখে ভাঁজ করে BA র মধ্যবিন্দু চিহ্নিত করো (ধরা হল E)
3. C বিন্দু D বিন্দুতে মেলানো যাবে কি?
4. E ও F বিন্দু সংযোগ করো।
5. B বিন্দু Aর ওপরে এবং C বিন্দু Dর সঙ্গে যে মিলে যাচ্ছে সেটা থেকে আমরা কী বুঝলাম?
6. EF রেখাখণ্ডটি যে ট্র্যাপিজিয়ামটিকে দুটি সমান ক্ষেত্রে বিভক্ত করল সেখান থেকে কী প্রমাণিত হচ্ছে?
7. AC ও BD র দৈর্ঘ্য মাপো, AC ও BD র মধ্যে কোনো সম্পর্ক পেলে কি?
8. AC ও BD কর্ণ মিলিত হওয়া বিন্দুটি ধরা হল G। DG, BG, AG ও CG র দৈর্ঘ্য মেপে দেখো। $\frac{AG}{CG} = \frac{BG}{GD} = \frac{AB}{DC}$ হয় তো? এবং $AG = BG$, $DG = CG$ হয় তো?

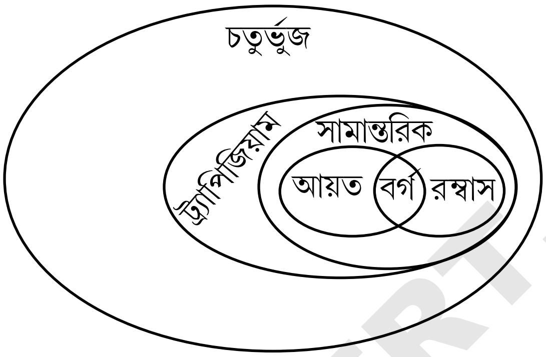
9. বিপরীত কোণ দুটির যোগফল =?

$\angle ADC + \angle ABC = ?$

$\angle DAB + \angle DCB = ?$



3.10 চতুর্ভুজের পরিবার (Family of quadrilateral)



উপরের ছবিটি থেকে চতুর্ভুজের পরিবারের সদস্যদের পারস্পরিক সম্বন্ধগুলি লক্ষ করো। নীচে কয়েকটি তুলে ধরা হল —

(i) যে কোনো ট্র্যাপিজিয়াম, সামান্তরিক, আয়ত, রম্বাস, বর্গ হচ্ছে চতুর্ভুজ।

(ii) যে কোনো সামান্তরিক, আয়ত, রম্বাস বা বর্গ হচ্ছে ট্র্যাপিজিয়াম।

(iii) যে কোনো আয়ত, বর্গ বা রম্বাস হচ্ছে সামান্তরিক।

(iv) একটি বর্গ প্রকৃত পক্ষে আয়ত বা রম্বাস দুটোই হবে।

(v) সমস্ত চতুর্ভুজ ট্র্যাপিজিয়াম নাও হতে পারে।

(vi) সমস্ত ট্র্যাপিজিয়াম সামান্তরিক নাও হতে পারে।

উদাহরণ 12 ঃ চতুর্ভুজগুলির নামকরণ করো যেখানে কর্ণগুলি

(i) পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়

(ii) পরস্পর লম্ব সমদ্বিখণ্ডিত হয়

(iii) সমান হয়

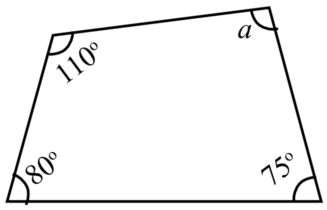
উত্তর ঃ (i) সামান্তরিক, বর্গ, আয়ত, রম্বাস

(ii) রম্বাস, বর্গ

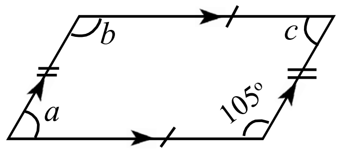
(iii) আয়ত, বর্গ

অনুশীলনী 3.2

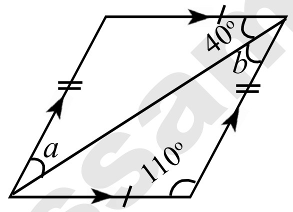
1. নীচে প্রদর্শিত বিভিন্ন চতুর্ভুর্জের অজ্ঞাত রাশি (বাহু/কোণ)-র মান বের করো। এখানে চতুর্ভুজগুলির বিপরীত বাহুতে দেখানো তীর চিহ্নের (➤) মাধ্যমে বোঝানো হয়েছে যে সেগুলি সমান্তরাল।



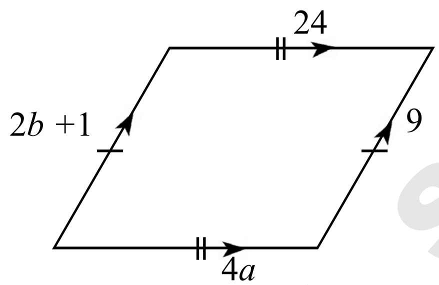
(i)



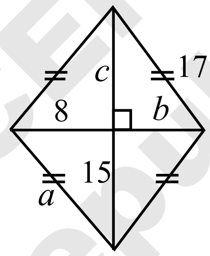
(ii)



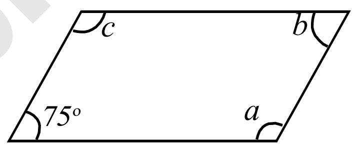
(iii)



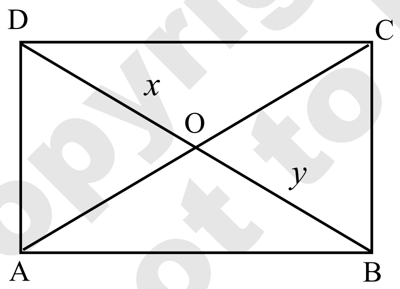
(iv)



(v)



(vi)

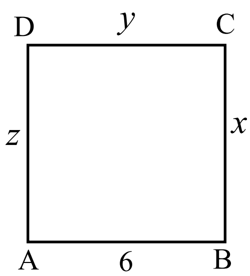


AC = 10

OA = x = ?

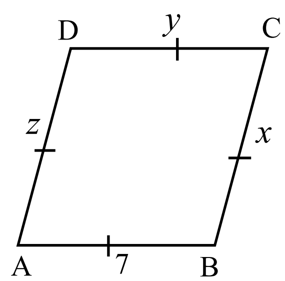
OB = y = ?

(vii)



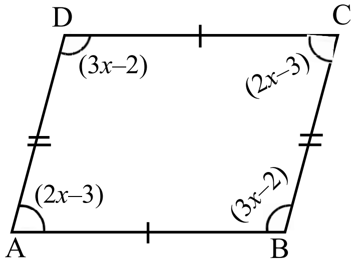
$x + y + z = ?$

(viii)

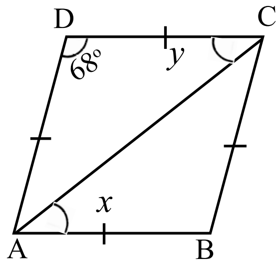


$x + y + z = ?$

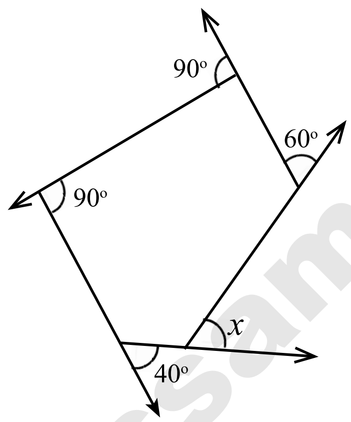
(ix)



(x)

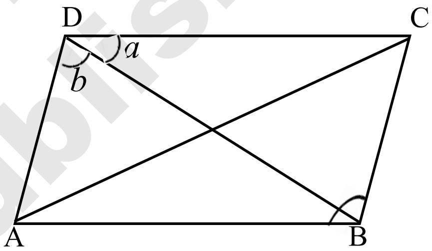


(xi)



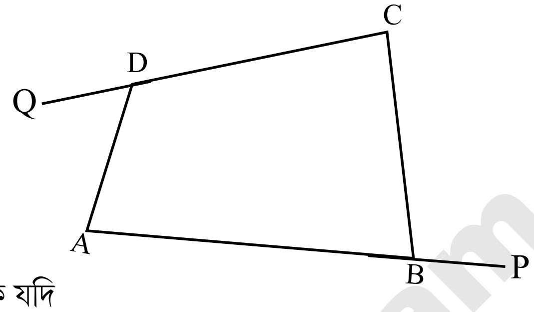
(xii)

2. একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত কোণের মাপের অনুপাত 4 : 5 হলে সামান্তরিকের কোণের মাপ বের করো।
3. একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত কোণের একটি অন্যটির চেয়ে 30° বেশি হলে সামান্তরিকের প্রতিটি কোণের মাপ বের করো।
4. ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণ, $a = 37°$ এবং $\angle ABC = 120°$ হলে, bর মাপ কত?

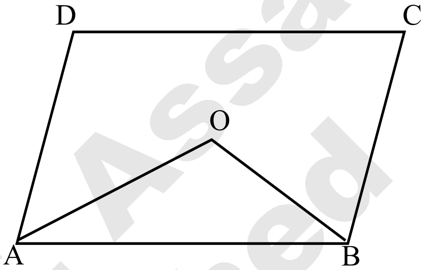


5. ABCD আয়তটিতে AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $6x - 2$ এবং BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $4x + 2$ হলে, xএর মান ও দৈর্ঘ্য বের করো।
6. ABCD আয়তটির দুটি কর্ণ O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। AC ও BDর দৈর্ঘ্য $3x + 1$ এবং $8x - 24$ হলে, x, AO এবং BO র মান বের করো।
7. ABCD বর্গে $\angle A = 4x + 30^0$ হলে, x -এর মান বের করো।
8. ABCD আয়তটির $AB = 2x + 5$, $BC = 20$ ও $AD = 3x + 5$ হলে আয়তটির চারটি বাহুর যোগফল নির্ণয় করো।
9. একটি ABCD সামান্তরিকে $\angle B = 2x + 10^0$ এবং $\angle D = 3x - 13^0$ হলে সামান্তরিকটির সবগুলি কোণের পরিমাণ বের করো।
10. একটি বর্গের চারটি বাহুর যোগফল 36 সেমি হলে বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য বের করো।
11. ABCD রম্বাসে $AB = 3x + 4$ ও $BC = 2x + 7$ হলে DC ও AD বাহুর দৈর্ঘ্য কত?
12. ABCD সামান্তরিকে AC ও BD কর্ণ E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। যে $AE = 10x$ তবে AC র মান বের করো। এখানে $x = 3$ হবে।
13. ABCD সামান্তরিকে BD কর্ণের উপর AE ও CF লম্ব রেখাখণ্ড হলে দেখাও যে $\Delta AED \cong \Delta CFB$

14. ABCD চতুর্ভুজের $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ বাহুকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দু পর্যন্ত বৃদ্ধি করা হল। এবার প্রমাণ করে যে $\angle ADQ + \angle CBP = \angle A + \angle C$



15. ABCD সামন্তরিকে $\angle A$ ও $\angle B$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক যদি O বিন্দুতে মিলিত হয় তবে $\angle AOB$ মাপ কত হবে।



16. একটি চতুর্ভুজের চারটি কোণের অনুপাত 3 : 4 : 5 : 6 হলে চতুর্ভুজের কোনগুলির মাপ কত হবে বের করো।

1. সসীম সংখ্যক রেখাখণ্ডের দ্বারা গঠিত একটি সরল বন্ধ সমতলীয় চিত্রকে বহুভুজ বলা হয়।
2. বহুভুজের , সন্নিহিত নয় এমন, দুটি শীর্ষবিন্দু সংযোগকারী রেখাখণ্ডগুলি বহুভুজের কর্ণ।
3. উত্তল বহুভুজের অন্তঃকোণের কোনোটিই 180^0 বা 180^0থেকে বেশি নয়। কিন্তু অবতল বহুভুজের ক্ষেত্রে কমেও একটি অন্তঃকোণের মান 180^0 থেকে বেশি।
4. অবতল বহুভুজের কর্ণ আঁকলে কমেও একটি কর্ণ বহুভুজের বাইরের দিকে থাকবে কিন্তু উত্তল বহুভুজের ক্ষেত্রে কর্ণ বহুভুজের ভিতর দিকে থাকবে।
5. যে সব বহুভুজের বাহুর দৈর্ঘ্যগুলো অসমান ও অন্তঃকোণগুলি ও সমান নয়, সেগুলি হচ্ছে বিষমবাহু বহুভুজ। অন্যদিকে যেসব বহুভুজের বাহুর দৈর্ঘ্যগুলো সমান ও অন্তঃকোণগুলিও সমান, সেগুলোকে সুষম বহুভুজ বলা হয়।
6. n বাহু সম্পন্ন বহুভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি $= (2n - 4) \times 90^0$।
7. সুষম বহুভুজের প্রতিটি অন্তঃকোণের মাপ $= \left(\dfrac{2n-4}{n}\right) \times 90^o$
8. যেকোনো বহুভুজের বহিঃকোণের সমষ্টি 360^o ।
9. যে চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল সেই চতুর্ভুজকে ট্র্যাপিজিয়াম বলা হয়।
10. যেসব চতুর্ভুজের দুইজোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল সেই সব চতুর্ভুজকে **সামান্তরিক** বলা হয়।

11. **সামান্তরিকের ধর্ম (Properties of Parallelogram) ঃ**

(i) বিপরীতবাহু সমান ও সমান্তরাল

(ii) বিপরীত কোণ সমান

(iii) সন্নিহিত কোণগুলো সম্পূরক

(iv) সামান্তরিকের দুটি কর্ণ তাদের ছেদবিন্দুতে পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

12. **সামান্তরিকের সবগুলো কোণ সমান হলে সামান্তরিকটি একটি আয়ত হবে।**

13. **আয়তের ধর্ম (Properties of Rectangle) ঃ**

(i) সামান্তরিকের চারটি ধর্ম।

(ii) প্রতিটি কোণ এক সমকোণ।

(iii) কর্ণগুলি সমান দৈর্ঘ্যের।

14. **সামান্তরিকের সবকয়টি বাহু সমান দৈর্ঘ্যের হলে তাকে রম্বাস বলা হয়।**

15. **রম্বাসের ধর্ম (Properties of Rhombus) ঃ**

(i) সামান্তরিকের সবগুলো ধর্ম।

(ii) বাহুগুলি সমান দৈর্ঘ্যর।

(iii) রম্বাসের কর্ণদুটি পরস্পর লম্ব সমদ্বিখণ্ডিত।

16. **একটি সামান্তরিকের বাহুগুলি ও কোণগুলি সমান হলে একটি বর্গ হয়।**

17. **বর্গের ধর্ম (Properties of Square) ঃ**

(i) সামান্তরিক, রম্বাস আয়তের সবগুলো ধর্ম।

(ii) বর্গের কর্ণগুলো পরস্পর লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

(iii) কর্ণগুলো সমান দৈর্ঘ্যের।

❑❑❑

অধ্যায়-4

ব্যবহারিক জ্যামিতি
(Practical Geometry)

I7F1U6

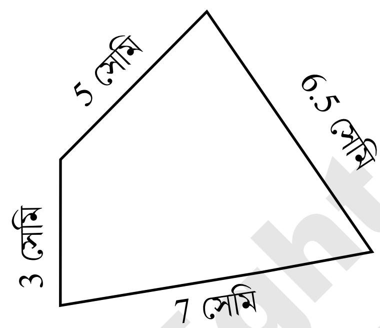
তোমরা আগের ক্লাসে ত্রিভুজ অঙ্কন প্রণালী শিখে এসেছ। ত্রিভুজের উপদানগুলো হচ্ছে 3টি বাহু ও 3টি কোণ। একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ আঁকতে হলে আমাদের তিনটি মাপের [বাহু-বাহু-বাহু (Side-Side-Side) অথবা বাহু-কোণ-বাহু (Side-Angle-Side) কিংবা কোণ-বাহু-কোণ (Angle-Side-Angle)] দরকার হয়।

এই অধ্যায়ে আমরা চতুর্ভুজ আঁকতে শিখব। তবে নির্দিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁকতে যে তিনটো মাপের দরকার হয়, চতুর্ভুজের ক্ষেত্রে কি সেরকম চারটি মাপের আবশ্যক, নাকি তার চেয়েও বেশি মাপের দরকার?

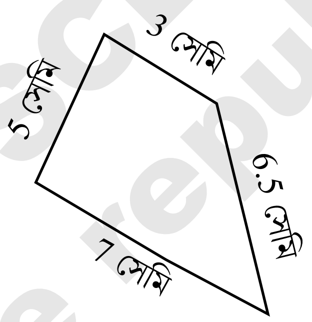
নীচের আলোচনা থেকে আমরা এই ধরণাটি আয়ত্ত করার চেষ্টা করব।

একটি চতুর্ভুজের উপাদান বলতে আমরা চারটি বাহু, চারটি কোণ ছাড়াও দুটি কর্ণ পাই। সুতরাং একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের আকৃতি গঠনের ক্ষেত্রে এই 10 টি উপদান মুখ্য ভূমিকা নেয়।

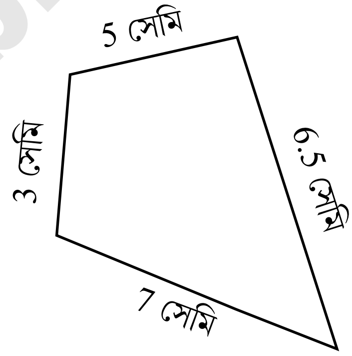
ধরা যাক 3 সেমি, 5 সে মি, 6.5 সেমি এবং 7 সেমি দৈর্ঘ্যের বাহু নিয়ে চতুর্ভুজ আঁকতে হ'বে।



চিত্র -i



চিত্র -ii

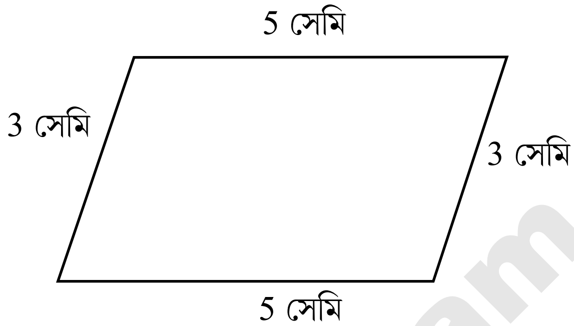


চিত্র -iii

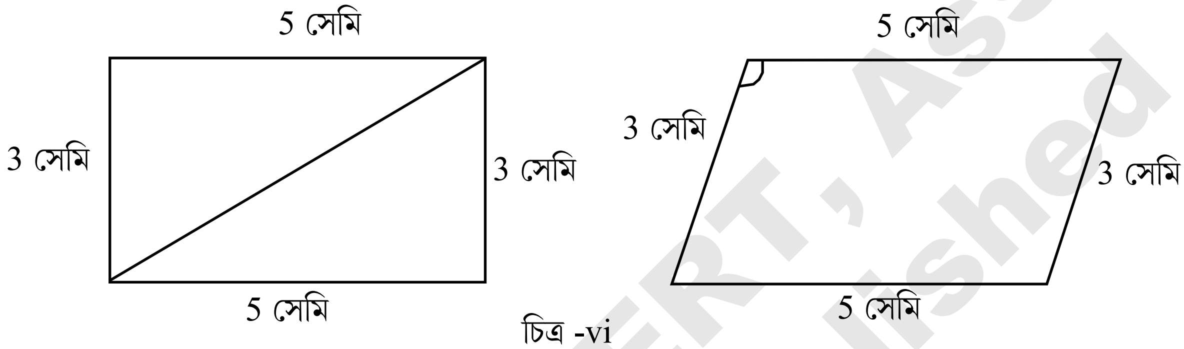
প্রদত্ত দৈর্ঘ্যের বাহু দ্বারা গঠিত চিত্র (i), (ii), (iii) চতুর্ভুজগুলো একই কি? সবগুলো কোণ ও কর্ণের দৈর্ঘ্য ভিন্ন ভিন্ন হ'বে— তাই নয় কি? অর্থাৎ আমরা বলতে চাইছি যে চারটি বাহু দ্বারা একটি নির্দিষ্ট অদ্বিতীয় চতুর্ভুজ আঁকা সম্ভব নয়।

আবার 5 সেমি, 3 সেমি, 5 সেমি, 3 সেমি দৈর্ঘ্যের চারটি বাহু দ্বারা আমরা যদি একটি আয়ত আঁকি (চিত্র iv) তবে সেই একই দৈর্ঘ্যের একটি সামান্তরিকও আমরা আঁকতে পারব (চিত্র v), কিন্তু চিত্র iv-এ যদি যেকোনো একটি কর্ণের মাপ অথবা সামান্তরিকের ক্ষেত্রে কোণের মাপ নির্দিষ্ট করা থাকে তবে সেই আয়তটি থেকে (চিত্র vi) আমরা অন্য কোনো আয়ত বা সামান্তরিক গঠন করতে পারব না।

চিত্র -iv



চিত্র -v



চিত্র -vi

সুতরাং আমরা বলতে পারি যে একটি অদ্বিতীয় চতুর্ভুজ আঁকতে হলে কমেও পাঁচটি মাপের (বাহু-কোণের) প্রয়োজন।

4.1 চতুর্ভুজ অঙ্কন (Construction of Quadrilateral)

আগের আলোচনা থেকে আমরা বুঝলাম যে অদ্বিতীয় নির্দিষ্ট একটি বহুভুজ আঁকার জন্য আমাদের 5 টি মাপের দরকার। নীচের মাপগুলোর সাহায্যে একটি অদ্বিতীয় নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকতে পারি—

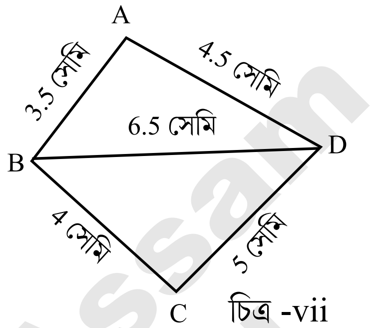
- যখন চারটি বাহু ও একটি কর্ণ দেওয়া থাকে।
- যখন দুটি কর্ণ ও তিনটি বাহু দেওয়া থাকে।
- যখন চারটি বাহু ও একটি কোণ দেওয়া থাকে।
- যখন দুটি সন্নিহিত বাহু ও তিনটি কোণ দেওয়া থাকে।
- যখন তিনটি বাহু ও দুটি অন্তর্বর্তী কোণ দেওয়া থাকে।
- যখন অন্য বিশেষ ধর্মগুলো জানা থাকে।

এবার আমরা উপরোক্ত মাপের সাহায্যে চতুর্ভুজ কী করে আঁকতে হয় শিখব।

4.1.1 চারটি বাহু ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকলে চতুর্ভূজ আঁকার পদ্ধতি (Construction of a quadrilateral when the length of four sides and one diagonal are given)

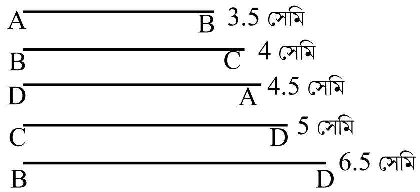
উদাহরণ ঃ ABCD একটি চতুর্ভুজ আঁকো যেখানে
AB = 3.5 সেমি, BC = 4 সেমি, CD = 5 সেমি
DA = 4.5 সেমি, এবং BD = 6.5 সেমি

সমাধান ঃ প্রথমে চতুর্ভুজটি আন্দাজ করার জন্য মোটামুটি একটি চতুর্ভুজ এঁকে নিলে মূল চতুর্ভুজটি আঁকতে সুবিধা হবে। (চিত্র নং vii)

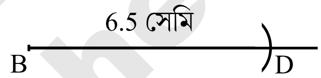


চিত্র -vii

স্তর 1 ঃ প্রথমে স্কেলের সাহায্যে মাপ অনুযায়ী 5টি রেখাখণ্ড এঁকে নেব।



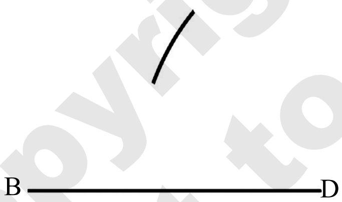
স্তর 2 ঃ এবার আমরা চতুর্ভুজটির কর্ণের স্থান নিশ্চিত করব। তার জন্য স্কেলের সাহায্য নিয়ে 6.5 সেমি থেকে একটু লম্বা রেখা আঁকব। চিত্র থেকে আমরা মোটামুটি ধরতে পেরেছি যে কর্ণ BD = 6.5 সেমি। তাই কম্পাসের সাহায্যে B বিন্দুকে কেন্দ্র করে 6.5 সেমি ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ রেখাখণ্ডের ওপর আঁকব। বৃত্তচাপটি রেখাখণ্ডের D বিন্দুতে কেঁটেছে বলে ধরে নিচ্ছি। সুতরাং, BD = 6.5 সেমি। (চিত্র-viii)



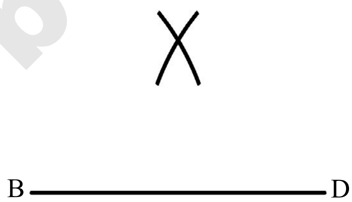
চিত্র -viii

[আমরা 5 টি রেখাখণ্ড মূলত পরবর্তী স্তরে আঁকার সুবিধার জন্য এঁকে নিয়েছিলাম। এমনটা না করে স্কেলের সাহায্যে 6.5 সেমি দৈর্ঘ্যের BD রেখাখণ্ড আঁকা যায়।]

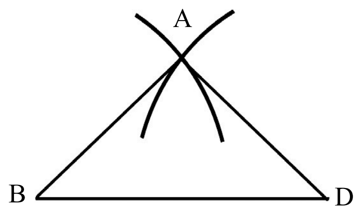
স্তর 3 ঃ এবার আমরা A বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করব। B বিন্দুকে কেন্দ্র করে রেখাখণ্ডের উপর 3.5 সেমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তচাপ আঁকা হল (চিত্র-ix) এবং D বিন্দুকে কেন্দ্র করে 4.5 সেমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তচাপ আঁকা হল। এই বৃত্তচাপটি আগের বৃত্তচাপটিকে যে বিন্দুতে ছেদ করেছে সেটা হচ্ছে A (চিত্র-x) । BA এবং DA সংযোগ করা হল (চিত্র-xi)।



চিত্র -ix

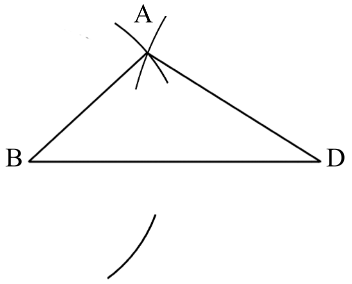


চিত্র -x

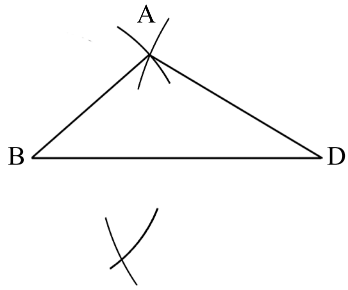


চিত্র -xi

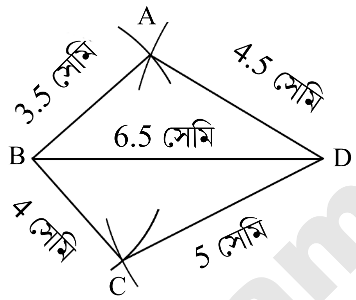
স্তর 4 ঃ এবার আমরা C বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করব। BD র সাপেক্ষে C বিন্দুটি A-র বিপরীত বাহুর ওপর থাকবে। সুতরাং B কে কেন্দ্র করে (Aর উল্টো দিকে) 4 সেমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তচাপ আঁকা হল (চিত্র -xii) এবং D কে কেন্দ্র করে A র উল্টো দিকে 5 সেমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তচাপ আঁকা হল (চিত্র -xiii)। এই দুটি চাপের ছেদবিন্দুটি হবে C। BC ও CD সংযোগ করে ABCD চতুর্ভুজটি সম্পূর্ণ করা হল (চিত্র -xiv)।



চিত্র -xii



চিত্র -xiii



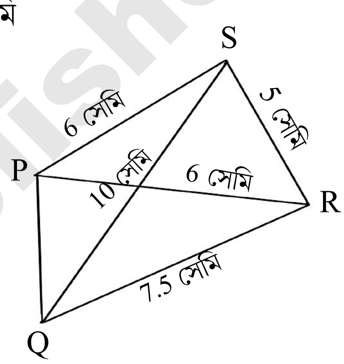
চিত্র -xiv

4.1.2 দুটি কর্ণ ও তিনটি বাহু দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজ আঁকার পদ্ধতি (Construction of a quadrilateral when two diagonals and three sides are given)

উদাহরণ (i) ঃ PQRS চতুর্ভুজ আঁকো যেখানে QR = 7.5 সেমি

PR = 6 সেমি, PS = 6 সেমি, RS = 5 সেমি আৰু QS = 10 সেমি

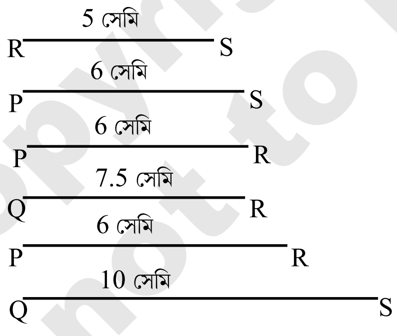
[আগের উদাহণের মতোই বাহুগুলোর ও কর্ণের অবস্থান জানার জন্য আমরা চতুর্ভুজটির একটি মোটামুটি ছবি আঁকব] এই প্রাথমিক ছবিটি থেকে আমরা জানলাম যে চতুর্ভুজটির তিনটি বাহু QR, RS ও PS-এর দৈর্ঘ্য দেওয়া রয়েছে এবং কর্ণ দুটির PR (6 সেমি) এবং QS (10 সেমি) মাপও দেওয়া রয়েছে।



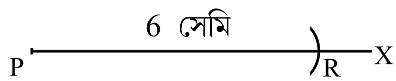
চিত্র -xv

সমাধান ঃ

স্তর 1 ঃ

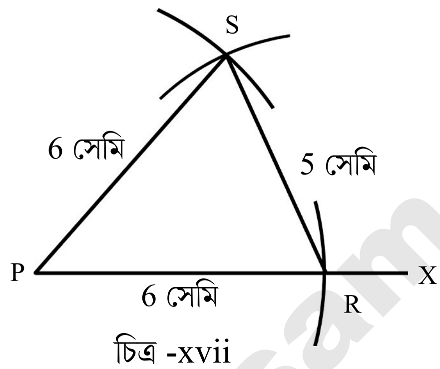


প্রথমে আমরা স্কেলের সাহায্যে 5 সেমি, 6 সেমি, 6 সেমি, 7.5 সেমি ও 10 সেমি দৈর্ঘ্যের রেখাখণ্ড এঁকে নেব এবং চতুর্ভুজের কর্ণের স্থান নিশ্চিত করার জন্য 6 সেমি থেকে লম্বা একটি রেখা PX আঁকব। এবার P কে কেন্দ্র করে কম্পাসের সাহায্য নিয়ে 6 সেমি (PR মাপ) ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তচাপ PX রেখাখণ্ডের ওপর আঁকব। বৃত্তচাপ রেখাখণ্ডকে যে জায়গায় ছেদ করেছে সেই বিন্দুটি হবে R (চিত্র -xvi)



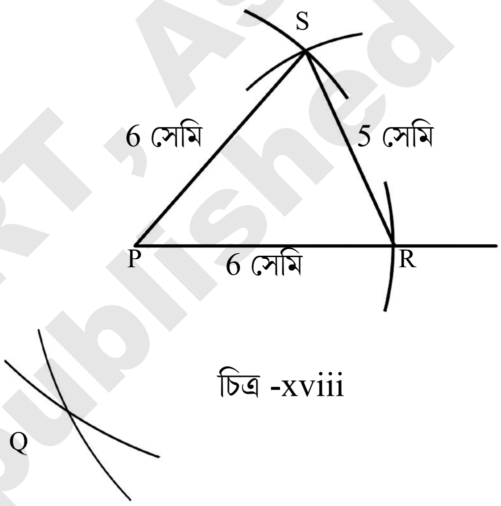
চিত্র -xvi

স্তর 2 : P বিন্দুকে কেন্দ্র করে PR-এর উপরের দিকে 6 সেমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তচাপ ও R বিন্দুকে কেন্দ্র করে PR-এর একই দিকে 5 সেমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তচাপ আঁকো। দুটি বৃত্তচাপ যেখানে পরস্পর ছেদ করেছে সেই বিন্দুটিই হবে S বিন্দুর অবস্থান (কারণ PS = 6 সেমি ও RS = 5 সেমি, S সাধারণ বিন্দু) (চিত্র -xvii)

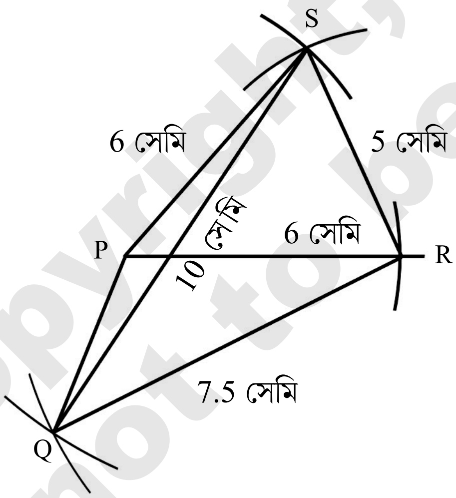


চিত্র -xvii

স্তর 3 : এবার আমরা Q বিন্দুর অবস্থান নিশ্চিত করব এবং Q বিন্দুটি S-এর বিপরীত দিকে হবে (QS কর্ণ)।
অতএব S কে কেন্দ্র করে 10 সেমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তচাপ (PR নীচের দিকে, S এর উল্টো দিকে) আঁকো এবং R কে কেন্দ্র করে 7.5 সেমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তচাপ (S এর উল্টো দিকে) আঁকো। দুই বৃত্তচাপের ছেদবিন্দুটিই Q এর অবস্থান নিশ্চিত করবে (কারণ QS =10 সেমি, RQ =7.5 সেমি Q সাধারণ বিন্দু) (চিত্র -xviii)



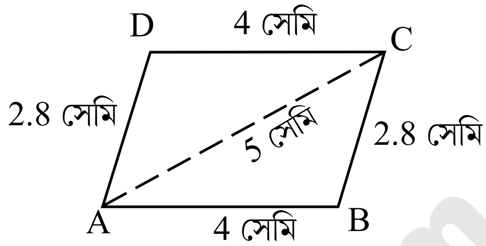
চিত্র -xviii



চিত্র -xix

স্তর 4 : এবার PQ, QS ও RQ সংযোগ করে PQRS চতুর্ভুজ সম্পন্ন করো। (চিত্র -xix)

উদাহরণ (ii)ঃ একটি ABCD সামান্তরিক আঁকো যেখানে AB = 4 সেমি, BC = 2.8 সেমি ও AC = 5 সেমি।

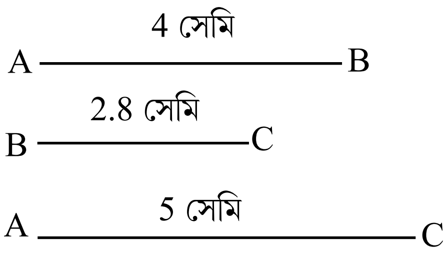


প্রথমে ABCD সামান্তরিকের একটি খসড়া ছবি এঁকে নাও। একটি কথা মনে রাখবে যে সামান্তরিকের বিপরীত বাহু সমান্তরাল এবং সমান দৈর্ঘ্যের। প্রকৃতপক্ষে এখানে চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য BC=AD = 2.8 সেমি ও AB=DC =4 সেমি এবং কর্ণ ACর দৈর্ঘ্য 5 সে মি দেওয়া রয়েছে।

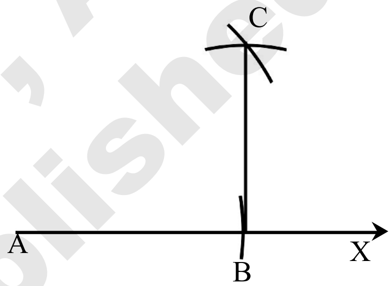
সুতরাং চারটি বাহু ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য যেহেতু দেওয়া রয়েছে, সুতরাং যেভাবে চতুর্ভুজ এঁকেছিলে ঠিক একই ভাবে সামান্তরিকটি আঁকার চেষ্টা করো।

বিকল্প অঙ্কন প্রণালী (Alternative Method of construction)

স্তর 1 :



প্রথমে স্কেলের সাহায্য নিয়ে 4 সেমি, 2.8 সেমি ও 5 সেমি দৈর্ঘ্যের তিনটি রেখাখণ্ড এঁকে নাও। এবার 4 সেমি থেকে লম্বা AXরেখাখণ্ড এঁকে A কে কেন্দ্র করে 4 সেমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তচাপ আঁকো। বৃত্তচাপটি AX-এর B বিন্দুতে কাটবে। অর্থাৎ AB = 4 সেমি আঁকা হল।

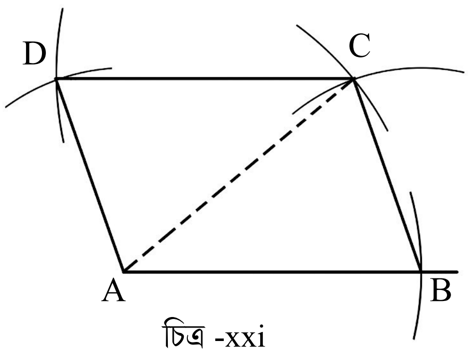


চিত্র -xx

[একেবারে AB = 4 সেমি দৈর্ঘ্যের রেখাখণ্ড আঁকলেও হব। আমরা পরবর্তী কালের সুবিধার জন্য তিনটি দৈর্ঘ্যের রেখাখণ্ড এঁকে নিয়েছি]

এবার B বিন্দুকে কেন্দ্র করে 2.8 সেমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তচাপ আঁকো (চিত্র -xx) এবং A বিন্দুকে কেন্দ্র করে 5 সেমি ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ আঁকো। দুটি বৃত্তচাপের ছেদবিন্দুটিই হবে C বিন্দু (কারণ AC ও BCর সাধারণ বিন্দু)। অতএব C বিন্দুটি শনাক্ত করে AC ও BC সংযোগ করো।

স্তর 2 : এবার D বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করতে A বিন্দুকে কেন্দ্র করে 2.8 সেমি ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ আঁকো এবং C বিন্দুকে কেন্দ্র করে 4 সেমি ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ আঁকো। এই দুই বৃত্তচাপ করা যেখানে ছেদ করছে সেই বিন্দুটিই হচ্ছে D বিন্দুর অবস্থান। D বিন্দুটি চিহ্নিত করো ও AD এবং CD সংযোগ করে ABCD সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করো। (চিত্র -xxi)



চিত্র -xxi

উদাহরণ (iii) ঃ একটি রম্বাস অঙ্কন করো যার কর্ণ AC= 6 সেমি ও BD = 8 সেমি।

সমাধান ঃ

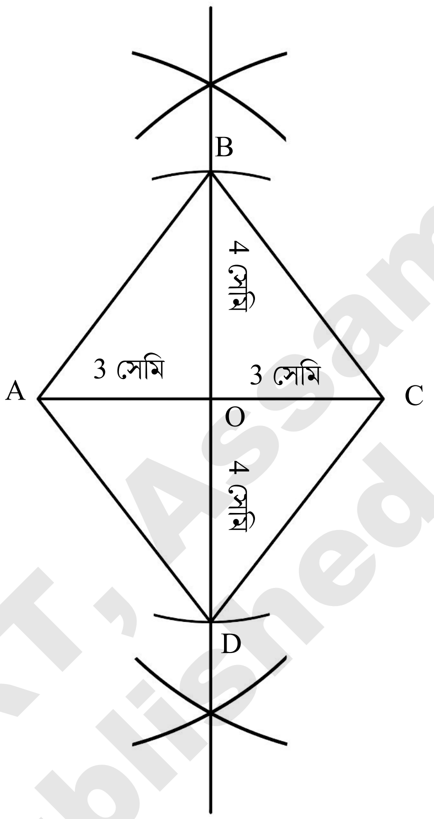
স্তর 1 : স্কেলের সাহায্যে 6 সেমি দৈর্ঘ্যের একটি রেখাখণ্ড AC আঁকো।

স্তর 2 : যেহেতু রম্বাসের কর্ণ দুটি পরস্পর লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হয়, অতএব আমরা AC বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক আঁকব। সমদ্বিখণ্ডকটি AC বাহুকে O বিন্দুতে কেটেছে।

স্তর 3 : এবার O বিন্দুকে কেন্দ্র করে AC বাহুর নীচ ও উপর দিকে 4 সেমি ব্যাসার্ধের (BDর অর্ধেক) দুটি বৃত্তচাপ লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের ওপর আঁকো। দুটো বৃত্তচাপ লম্ব সমদ্বিখণ্ডককে যে দুটি বিন্দুতে ছেদ করেছে সেদুটিই হবে B ও D বিন্দুর অবস্থান।

স্তর 4 : AB, AD, DC, CB সংযোগ করে ABCD রম্বাস সম্পূর্ণ করো। (চিত্র -xxii)

[AB, BC, CD ও DA বাহুর দৈর্ঘ্য মেপে সবগুলো বাহুর দৈর্ঘ্য সমান হল কি না পরীক্ষা করে দেখতে পার।]



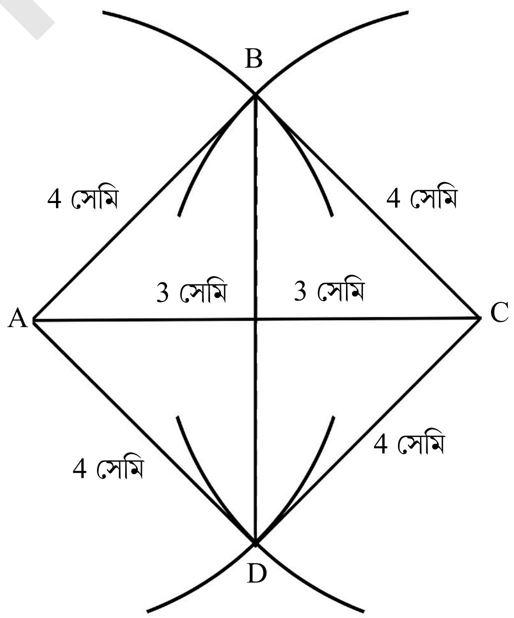
চিত্র -xxii

উদাহরণ (iv) ঃ একটি রম্বাস ABCD আঁকো যেখানে বাহু AB = 4 সেমি ও কর্ণ AC = 6 সেমি

সমাধান ঃ রম্বাসের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান, অতএব ABCD রম্বাসের সবগুলো বাহুর দৈর্ঘ্য (AB = BC = CD = DA) 4 সেমি হবে।

অঙ্কনের স্তর (Steps of Construction)

1. স্কেলের সাহায্যে 6 সেমি দৈর্ঘ্যের AC রেখাখণ্ড আঁকো।
2. A এবং Cকে কেন্দ্র করে 4 সেমি ব্যাসার্ধের AC বাহুর ওপর দিকে দুটি এবং নীচের দিকে দুটি বৃত্তচাপ আঁকো। উপরের দুটি চাপের ছেদবিন্দু বাহু ধরা হল B এবং নীচের চাপদুটির ছেদবিন্দু ধরা হল D। এবার AB, BC, CD এবং DA সংযোগ করে ABCD রম্বাস সম্পূর্ণ করো। (চিত্র -xxiii)



চিত্র -xxiii

অনুশীলনী 4.1

1. নীচের চতুর্ভুজগুলো অঙ্কন করো (Construct the following Quadrilaterals) :

i) চতুর্ভুজ ABCD যেখানে AB = 4 সেমি, BC = 6 সেমি, CD = 5 সেমি, DA = 5.5 সেমি এবং কর্ণ AC = 7 সেমি

ii) চতুর্ভুজ ABCD, যেখানে AB = 4 সেমি, BC = 3 সেমি, DA = 2.8 সেমি কর্ণ AC = 5 সেমি এবং কর্ণ BD = 4.5 সেমি।

iii) চতুর্ভুজ PQRS যেখানে QR = 4.5 সেমি, PS =5.5 সেমি, RS = 5 সেমি, কর্ণ PR = 5.5 সেমি, আরেকটি কর্ণ QS = 7 সেমি

iv) সামান্তরিক EFGH, যেখানে FG = 7 সেমি, GH = 5.5 সেমি এবং HF = 8.5 সেমি।

v) রম্বাস DEFG , যেখানে DE = 5 সেমি এবং EG = 6.5 সেমি

vi) রম্বাস LMNO, যেখানে LN = 6 সেমি ও MO = 7 সেমি

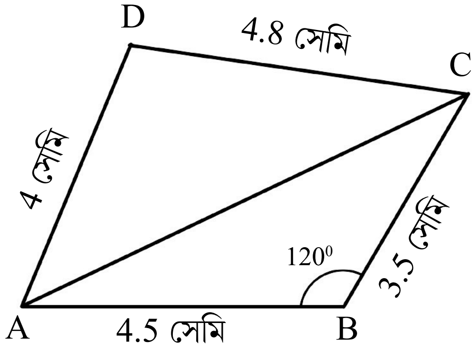
ইতিমধ্যে আমরা একটি চতুর্ভুজের 5 টি বাহুর মাপ (অর্থাৎ চারটি বাহু ও একটি কর্ণ বা তিনটি বাহু দুটি কর্ণ) দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজটি কীভাবে আঁকতে হয় সেটা আলোচনা করলাম। এবার চতুর্ভুজটি আঁকতে আমরা 5 টি মাপের মধ্যে কোণের মাপও যোগ করব। যেখন (i) চারটি বাহু, একটি কোণ, (ii) তিনটি বাহু. দুটি কোণ, ও (iii) দুটি বাহু তিনটি কোণ।

তোমরা ষষ্ঠ শ্রেণির গণিতের পাঠে কোণ এঁকেছিলে, যেখন 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 120^0, 150^0 105^0 ইত্যাদি। এবার চতুর্ভুজ আঁকতেও সেই ধারণা কাজে লাগবে। যেকোনো মাপের কোণ আঁকার বিভিন্ন স্তর ও প্রণালীগুলো আবার অভ্যাস করবে।

4.1.3 চারটি বাহু ও একটি কোণ দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজ আঁকার পদ্ধতি (Construction of a quadrilateral when four sides and one angle are given)

উদাহরণ ঃ একটি চতুর্ভুজ ABCD আঁকা হ’ল যেখানে AB = 4.5 সেমি, BC = 3.5 সেমি, CD = 4.8 সেমি, AD = 4 সেমি এবং $\angle B = 120^0$

[আগের মতো আমরা একটি ABCD চতুর্ভুজের খসড়া চিত্র এঁকে নেব। $\angle B = 120^0$, AB = 4.5 সেমি, BC = 3.5 সেমি, AD = 4 সেমি এবং DC = 4.8 সেমি।]



চিত্র -xxiv

অঙ্কন ঃ

স্তর 1 ঃ AB = 4.5 সেমি রেখাখণ্ড আঁকো (স্কেল ব্যবহার করে)

স্তর 2 ঃ $\angle B = 120^0$ কোণ আঁকো।

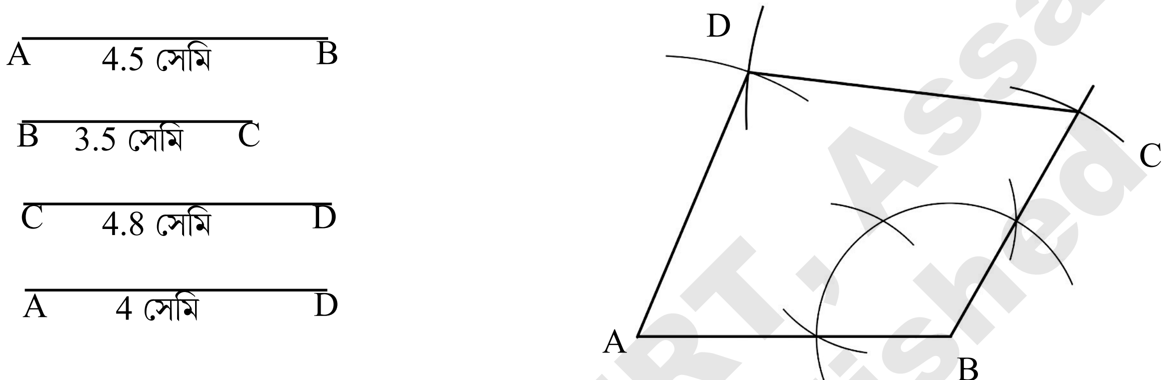
স্তর 3 ঃ B বিন্দুকে কেন্দ্র করে 3.5 সেমি ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ আঁকো। বৃত্তচাপটি অঙ্কন করা বিন্দুটিকে C নামে চিহ্নিত করো।

স্তর 4 ঃ A বিন্দুকে কেন্দ্র করে 4 সেমি ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ আঁকো।

স্তর 5 ঃ C বিন্দুকে কেন্দ্র কবে 4.8 সেমি ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ আঁকো, যাতে আগের (স্তর 4) বৃত্তচাপকে ছেদ করে।

স্তর 6 ঃ স্তর 4 ও স্তর 5-এ আঁকা বৃত্তচাপ যে বিন্দুতে ছেদ করেছে তার স্থান হবে D (কারণ AD = 4 সেমি ও CD = 4.8 সেমি, D সাধারণ বিন্দু)

স্তর 7 ঃ AD ও CD সংযোগ করো ও ABCD চতুর্ভুজটি সম্পূর্ণ করো। (চিত্র -xxv)

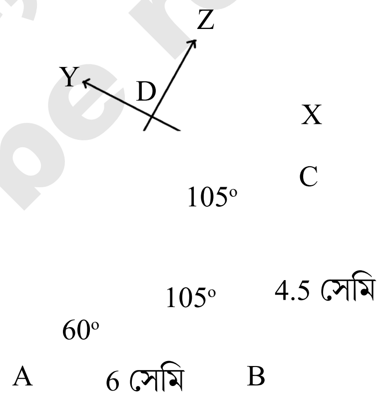


চিত্র -xxv

4.1.4 দুটি সন্নিহিত বাহু ও তিনটি কোণ দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজ আঁকার পদ্ধতি (Construction of a quadrilateral who and three angles are given)

উদাহরণ ঃ একটি চতুর্ভুজ ABCD আঁকো যেখানে $\angle A = 60^0$, $\angle B = 105^0$, $\angle C = 105^0$ ও AB = 6 সেমি এবং BC = 4.5 সেমি

(আগের উদাহরণগুলোর মতোই আমরা মোটামুটি একটি ছবি এঁকে নেব)



(চিত্র -xxvi)

সমাধান ঃ

স্তর 1 ঃ 6 সেমি দৈর্ঘ্যের একটি রেখাখণ্ড স্কেলের সাহায্যে এঁকে নাও। সেটা হবে AB = 6 সেমি

স্তর 2 ঃ A বিন্দুতে 60^0 কোণ আঁকো।

স্তর 3 ঃ B বিন্দুতে চাঁদার সাহায্যে অথবা অন্য পদ্ধতির মাধ্যমে 105^0 কোণ আঁকো।

স্তর 4 ঃ B বিন্দুকে কেন্দ্র করে 4.5 সেমি ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ $\overrightarrow{BX}$ রশ্মির ওপরে আঁকো। $\overrightarrow{BX}$ ও বৃত্তচাপের ছেদবিন্দুটিই C বিন্দুর অবস্থান (কারণ BC = 4.5 সেমি)।

স্তর 5 ঃ C বিন্দুতে 105^0 কোণ আঁকো এবং $\overrightarrow{CY}$ রশ্মি অঙ্কন করো।

স্তর 6 ঃ $\overrightarrow{AZ}$ রশ্মি ও $\overrightarrow{CY}$ রশ্মির ছেদবিন্দুটিই চতুর্ভুজের চতুর্থ শীর্ষবিন্দু D-র অবস্থান।

ABCD হল সেই নির্ণেয় চতুর্ভুজ। (চিত্র -xxvi)

4.1.5 তিনটি বাহু ও দুটি মধ্যবর্তী কোণ দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজ আঁকার পদ্ধতি (Construction of a quadrilateral when three sides and two included angles are given)

উদাহরণ ঃ একটি PQRS চতুর্ভুজ আঁকো যেখানে PQ = 3.5 সেমি QR= 3 সেমি,
RS = 4 সেমি এবং $\angle Q = 75^0$ এবং $\angle R = 120^0$

সমাধান ঃ

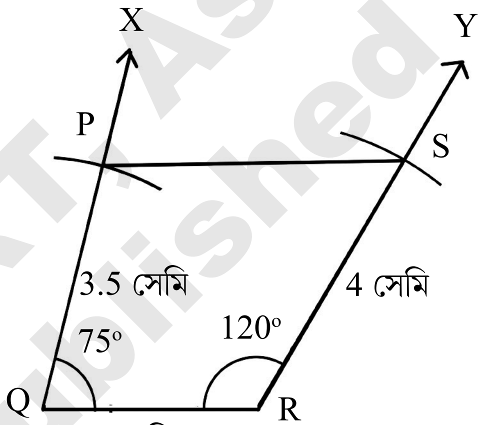
স্তর 1 ঃ QR = 3 সেমি দৈর্ঘ্যর রেখাখণ্ড আঁকো

স্তর 2 ঃ Q বিন্দুতে চাঁদার সাহায্যে অথবা অন্য পদ্ধতির দ্বারা 75^0 কোণ আঁকো।

স্তর 3 ঃ R বিন্দুতে 120^0 কোণ আঁকো।

স্তর 4 ঃ Qকে কেন্দ্র করে আঁকা 3.5 সেমি ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ $\overrightarrow{QX}$ রশ্মিকে P বিন্দুতে কেটেছে।

স্তর 5 ঃ Rকে কেন্দ্র করে 4 সেমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তচাপ $\overrightarrow{RY}$ রশ্মির ওপর আঁকো। বৃত্তচাপটি $\overrightarrow{RY}$ রশ্মিকে ছেদ করা বিন্দুটিই হচ্ছে S (কারণ RS = 4 সেমি)।



চিত্র -xxvii

স্তর 6 ঃ PS সংযোগ করে PQRS চতুর্ভুজ সম্পন্ন করো। (চিত্র -xxvii)

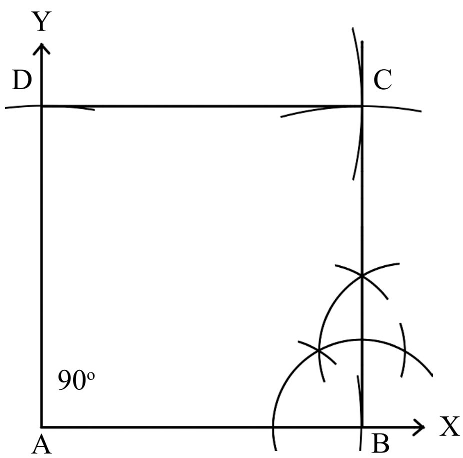
4.1.6 বিশেষ ধর্ম প্রয়োগ করে চতুর্ভুজ আঁকার পদ্ধতি (Construction of quadrilateral using special properties)

আমরা ইতিমধ্যে রম্বাস ও সামান্তরিকের ধর্ম প্রয়োগ করে আগের 4.1.2র উদাহরণ (iii) ও (iv)এ রম্বাস ও সামান্তরিক এঁকেছি। ঠিক একইভাবে বর্গের ধর্ম ব্যবহার করে এবার একটি বর্গ আঁকি এসো।

উদাহরণ ঃ 5 সেমি বাহুর দৈর্ঘ্য সম্পন্ন একটি বর্গ আঁকো।

স্তর 1 ঃ 5 সেমি থেকে লম্বা একটি রেখা আঁকো। A কে কেন্দ্র করে 5 সেমি ব্যাসার্ধের চাপ আঁকো। চাপটি $\overrightarrow{AX}$ কে B বিন্দুতে ছেদ করেছে। AB বর্গের বাহু।

স্তর 2 ঃ এবার A বিন্দুতে কম্পাস বা ত্রিকোণীর মাধ্যমে 90^0 কোণ আঁকো এবং AY লম্ব দিকে A কে কেন্দ্র করে 5 সে মি ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ আঁকো। এই বৃত্তচাপ AY কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। অর্থাৎ AD = 5 সে মি।



স্তর 3 ঃ এবার D বিন্দুকে কেন্দ্র করে 5 সেমি ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ AD-র সমান্তরাল ভাবে আঁকো। দুটি বৃত্তচাপই C বিন্দু কটাকটি করেছে। DC ও BC সংযোগ করে ABCD বর্গটি সম্পূর্ণ করো (AB=AD = BC =CD = 5 সেমি)।

কার্য (i) অন্য পদ্ধতির দ্বারা বর্গটি আঁকার চেষ্টা করো।
(ii) 4 সেমি ও 5 সেমি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট একটি আয়ত আঁকো।

দলগত কার্য তোমরা তিন-চারজনের একটি দল গঠন করে নীচের বিষয়গুলো আলোচনা করো।

- একটি চতুর্ভুজ আঁকো যার একটি বাহু 7 সেমি এবং চারটি কোণ যথাক্রমে 75^0, 85^0, 110^0, 90^0। চতুর্ভুজটি আঁকা সম্ভব কি?
- এমন একটি ABCD ঘুড়ি আঁকতে পারবে কি যেখানে AD = 4 সেমি, AC = 8 সেমি এবং CD = 6 সেমি? (ঘুড়ির ধর্ম প্রয়োগ করো।)
- একটি চতুর্ভুজের চারটি কোণ ও একটি বাহুর মাপ দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজটি আঁকা সম্ভব নয়— এই উক্তিটির সত্যতা বিচার করো।

বিশেষ দ্রষ্টব্য (Special note)ঃ খসড়া চিত্র আঁকা বাধ্যতামূলক নয়। চিত্রের সুবিধার জন্যই এমনটা দেখানো হয়েছে। পরবর্তী কালে তোমরা যখন অভ্যাস করে বিষয়টা বুঝবে তখন এভাবে খসড়া চিত্র না আঁকলেও হবে।

অনুশীলনী 4.2

1. একটি চতুর্ভুজ ABCD আঁকো যেখানে AB = 6 সেমি, BC = 7 সেমি, CD = 6.5 সেমি DA = 5.5 সেমি এবং $\angle B = 105^0$
2. একটি চতুর্ভুজ অঙ্কন করো যেখানে AB = 5 সেমি, BC = 4 সেমি, CD = 3.5 সেমি DA = 4.5 সেমি এবং $\angle C = 75^0$
3. একটি চতুর্ভুজ ABCD অঙ্কন করো যেখানে AB = 4 সেমি, BC = 7 সেমি, $\angle A = 105^0$, $\angle B = 75^0$ এবং $\angle C = 120^0$
4. একটি চতুর্ভুজ EFGH অঙ্কন করো যেখানে EF = 5 সেমি, FG = 7.5 সেমি, $\angle E = 90^0$, $\angle G = 105^0$ এবং $\angle H = 80^0$
5. একটি সামান্তরিক PQRS আঁকো যেখানে PQ = 6 সেমি, QR = 7 সেমি, এবং $\angle S = 85^0$
6. একটি আয়ত LMNO আঁকো যেখানে LM = 6 সেমি, এবং MN = 4 সেমি
7. একটি চতুর্ভুজ PQRS অঙ্কন করো যেখানে PQ = 6 সেমি, QR = 7 সেমি, RS = 7.5 সেমি, $\angle Q = 105^0$ এবং $\angle R = 80^0$
8. একটি চতুর্ভুজ ABCD অঙ্কন করো যেখানে AB = 4.5 সেমি, BC = 5.5 সেমি, CD = 5 সেমি, $\angle B = 68^0$, এবং $\angle C = 90^0$
9. একটি আয়ত অঙ্কন করো যার সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি ও 7 সেমি
(ওপরের অনুশীলনীতে প্রয়োজন সাপেক্ষে চাঁদা ব্যবহার করতে পারবে)

আমরা কী কী শিখলাম?

একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকতে কমেও পাঁচটি মাপের (বাহু-কোণ) প্রয়োজন।

একটি চতুর্ভুজ অদ্বিতীয়ভাবে আঁকতে পারি যদি—

- চতুর্ভুজের চারটি বাহু ও একটি বর্গের মাপ দেওয়া থাকে।
- চতুর্ভুজের তিনটি বাহু ও দুটি কর্ণের মাপ দেওয়া থাকে।
- চতুর্ভুজের চারটি বাহু ও একটি কোণের মাপ দেওয়া থাকে।
- চতুর্ভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু ও তিনটি কোণ দেওয়া থাকে।
- চতুর্ভুজের তিনটি বাহু ও মধ্যবর্তী দুটি কোণ দেওয়া থাকে।
- চতুর্ভুজের অন্য আরো কোনো বিশেষ ধর্ম জানা থাকে।

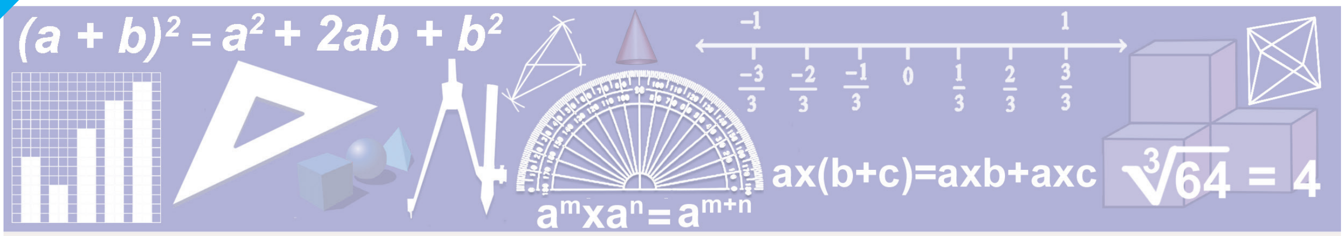
❑❑❑

- Mathematics is the most beautiful and most powerful creation of the human spirit.

  -Stefan Banach

- Mathematics is the abstract key which turns the look of the physical universe.

  -John Polkinghome



অধ্যায়-5

তথ্যের ব্যবহার (Data Handling)

5.1 তথ্য খুঁজি এসো (Let us look for data) :

বিভিন্ন পরিস্থিতি বা পরিপ্রেক্ষিতের অধ্যয়নের জন্য তথ্যের আবশ্যক এবং তাই আমাদের তথ্য সংগ্রহ করতে হয়। উদাহরণস্বরূপ, একটি গ্রামের প্রতিটি বাড়িতে কতজন মানুষ রয়েছে, প্রতিটি ঘরে পুরুষের সংখ্যা, মহিলার সংখ্যা কত কিংবা তাদের শিক্ষাগত যোগ্যতা কত ইত্যাদি। এটা বের করতে হলে প্রত্যেকের ঘরে ঘরে গিয়ে তথ্য সংগ্রহ করতে হবে। সেই তথ্যগুলো শৃংখলাবদ্ধভাবে সংগঠিত করে বিভিন্ন উদ্দেশ্য অনুযায়ী সেগুলো বিশ্লেষণ করতে হবে।

ছাত্র-ছাত্রীরা বিদ্যালয়ের প্রতিটি ছাত্র-ছাত্রীর পরিবারের সদস্য সংখ্যার তথ্য সংগ্রহ করে বিশ্লেষণ করে দেখতে পার।

তথ্যগুলি সহজভাবে যাতে বোঝা যায় সেজন্য চিত্রলেখের মাধ্যমে উপাস্থাপন করা হয়। আগের ক্লাশে শিখে আসা বিভিন্ন চিত্রলেখগুলো আবার করে দেখি এসো

5.2 সচিত্র লেখ (Pictograph) :

এই ধরণের লেখের ক্ষেত্রে সাধারণত প্রতীক ব্যবহার করে তথ্য উপস্থাপন করা হয়।

নীচের উদাহরণগুলো লক্ষ করি এসো—

একটি বইয়ের দোকানে সপ্তাহের প্রথম চারদিনে বিক্রি হওয়া বইয়ের সংখ্যার তালিকা নীচে দেওয়া হল—

সোমবার	📖📖📖📖📖
মঙ্গলবার	📖📖📖📖📖📖
বুধবার	📖📖📖
বৃহস্পতিবার	📖📖📖

এখানে 📖 = পাঁচটি বই ধরা হয়েছে

(i) কোন দিনটিতে সবচেয়ে বেশি বই বিক্রি হয়েছে?

(ii) মঙ্গল ও বুধবার মোট কতগুলো বই বিক্রি হয়েছে বলতে পার কি?

5.3 দণ্ডচিত্র (Bar graph) ঃ

দণ্ডচিত্রে নির্ধারিত মানের সমানুপাতিক উচ্চতাবিশিষ্ট ও একই সমান প্রস্থের দণ্ড ব্যবহার করে তথ্য প্রদর্শন করা হয়।

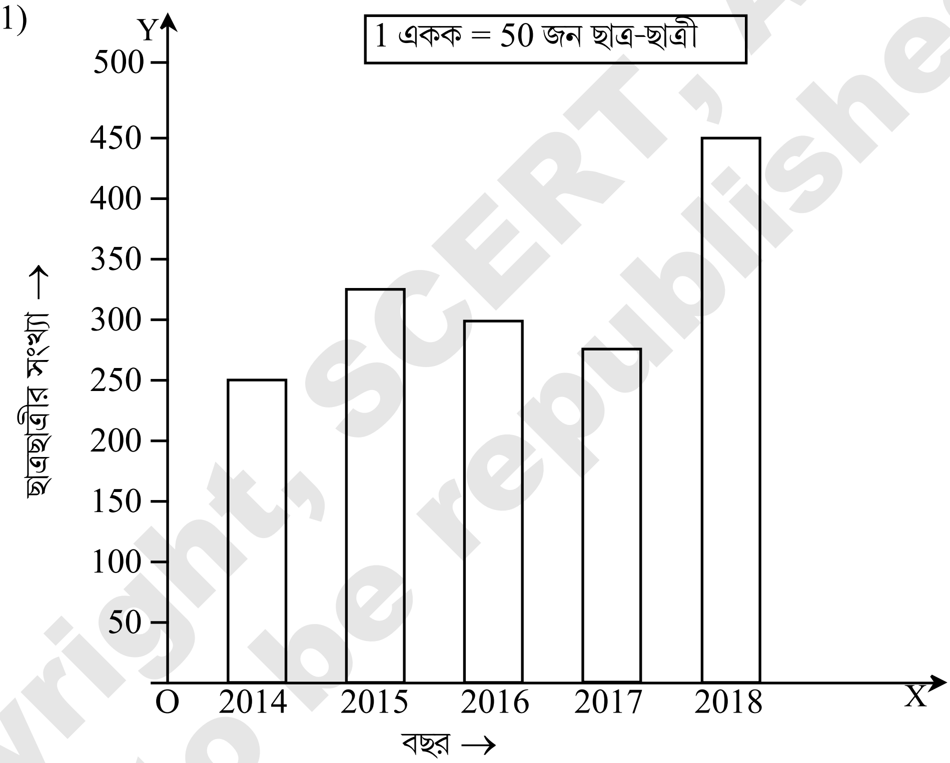
নীচের উদাহরণটি দেখি এসো —

একটি বিদ্যালয়ের বিগত পাঁচ বছরের ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা পরের পাতার তালিকায় দেওয়া হল .

বছর	ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা
2014	250
2015	330
2016	300
2017	280
2018	450

তালিকা-1

যে তথ্যগুলো দেওয়া রয়েছে সেখানে সবচেয়ে বড় মানটি হল 450। অতএব 450-এর থেকে বড় একটি মান নিয়ে স্কেল সমাপ্ত করতে হবে। Y-বর্ণের দিকে 50 -এর ব্যবধানে সমান ভাবে ভাগ করা হয়েছে। অর্থাৎ 1 একক হল 50 জন ছাত্রছাত্রী। X-বর্ণের দিকে শিক্ষাবর্ষ এবং Y-বর্ণের দিকে ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা দেখিয়ে দণ্ডচিত্র আঁকা হল (চিত্র 5.1)



চিত্র নং 5.1

ওপরের দণ্ডচিত্রটি দেখে নীচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও—

(i) কোন বছরে সবচেয়ে বেশি ছাত্রছাত্রী রয়েছে এবং কতজন?

(ii) সবচেয়ে বেশি ও সবচেয়ে কম ছাত্রছাত্রীর মধ্যে পার্থক্য কত?

(iii) কোন কোন বছরগুলোতে ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা 300 বা তার চেয়ে বেশি?

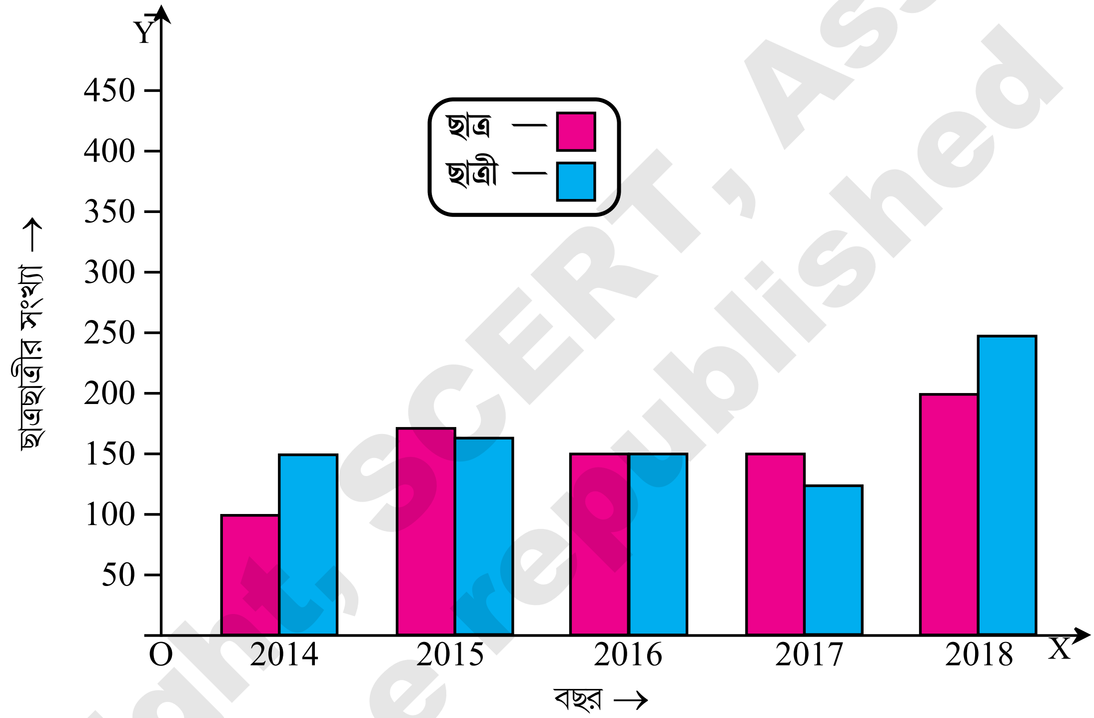
5.4 দ্বিস্তম্ভ বা যুগ্ম চিত্র (Double Bar Graph) :

যুগ্ম দণ্ডচিত্র দুই ধরনের তথ্য প্রদর্শন করে। তথ্যের তুলনার জন্য এই যুগ্ম দণ্ডচিত্র উপযোগী। উপরের উদাহরণটিকে আমরা যুগ্ম দণ্ডচিত্রের সাহায্যে করে দেখতে পারি —

বছর	ছাত্র	ছাত্রী
2014	100	150
2015	170	160
2016	150	150
2017	150	130
2018	200	250

তালিকা-2

তথ্যটুকু যুগ্ম দণ্ডচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করি এসো —



চিত্র নং 5.2

(i) কোন বছরটিতে সবচেয়ে বেশি ছাত্র ছিল?

(ii) কোন বছরটিতে সবচেয়ে কম ছাত্র ছিল?

(iii) কোন বছরটিতে ছাত্র ও ছাত্রীর সংখ্যা সমান ছিল?

5.5 তথ্য সংগঠিতকরণ (Organisation of data) :

একদল ছাত্রছাত্রীকে তাদের প্রিয় খেলার কথা জিজ্ঞাসা করায় তাদের উত্তর ছিল এইরকম—

ক্রিকেট, ক্রিকেট ফুটবল, হকি, হকি, ফুটবল, কাবাডি, ফুটবল, হকি, হকি, ফুটবল, হকি, ক্রিকেট, ক্রিকেট, ক্রিকেট, ফুটবল, হকি, ক্রিকেট, কাবাডি, কাবাডি, ক্রিকেট, ফুটবল, ক্রিকেট, হকি, কাবাডি, কাবাডি, ফুটবল।

এভাবে **মূল উৎস থেকে সংগ্রহ করা তথ্যকে প্রাথমিক তথ্য (Primary data) বলা হয়**। এই তথ্যগুলো অসংগঠিতভাবে রয়েছে। সঠিক অর্থপূর্ণ সিদ্ধান্তে পৌঁছানোর জন্য আমাদের তথ্যগুলো শৃংখলাবদ্ধভাবে সংগঠিত করতে হবে।

অতএব দাগচিহ্ন ব্যবহার করে তথ্যটুকু সাজাই এসো

খেলার নাম	দাগচিহ্ন	ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা
ক্রিকেট	𝍸 |||	8
ফুটবল	𝍸 ||	7
হকি	𝍸 ||	7
কাবাডি	𝍸	5

মোট = 27

তালিকা-3

প্রতিটি খেলার জন্য যতগুলি করে দাগ পড়েছে, সেটার অর্থ হল ততজন ছাত্রছাত্রী সেই খেলাটিকে ভালোবাসে। এই সংখ্যাগুলোকে সেই নির্দিষ্ট খেলাটির **বারংবারতা (Frequency)** বলে ধরা হয়।

একটি নির্দিষ্ট তথ্য কতবার সংযোজিত হল সেই তথ্যটুকু আমরা বারংবারতার মাধ্যমে জানতে পারি।

উপরের তালিকায় ক্রিকেট খেলা ভালোবাসে এমন ছাত্রছাত্রীদের বারংবারতা হল 8, কাবাডি খেলা পছন্দ করা ছাত্রছাত্রীর বারংবারতা হল 5, ফুটবল ও হকি যাদের প্রিয় তাদের উভয়েরই বারংবারতা হল 7।

এই তথ্য কতবার সংযোজিত হল সেটা যে তালিকার মাধ্যমে জানতে পারি সেটা হবে **বারংবারতা বিভাজন তালিকা (Frequency distribution table)**।

5.6 তথ্যের শ্রেণিবদ্ধতা (Grouping of Data) :

নীচের উদাহরণটি লক্ষ করো—

60 জন মানুষের বয়স (বছর হিসেবে) নিম্নরূপ ঃ

37, 61, 4, 19, 21, 16, 6, 12, 23, 29, 35, 39, 52, 13, 22, 31,

36, 42, 8, 56, 63, 57, 9, 18, 24, 11, 32, 41, 46, 5, 14, 17,

26, 33, 44, 28, 3, 45, 59, 30, 15, 20, 25, 34, 38, 27, 43, 55,

47, 51, 64, 68, 48, 27, 49, 54, 66, 65, 53, 7

প্রতিটি পর্যবেক্ষণের জন্য আমরা যদি পৃথক পৃথক বারংবারতা বিভাজন তালিকা প্রস্তুত করি, তবে তালিকাটি লম্বা হবে। তাই সুবিধার জন্য আমরা তথ্যটিকে নির্দিষ্ট সংখ্যা পর্যন্ত শ্রেণিবদ্ধ করে উপস্থাপন করতে পারি। যেমন 0 – 10, 10 – 20 । এইরকম পরিসর ধরে ধরে আমরা প্রতিটি পরিসরের অন্তর্গত বয়সগুলো বারংবারতা বিভাজন তালিকায় প্রস্তুত করতে পারি।

উপরের তথ্যটুকু নিয়ে বারংবারতা বিভাজন তালিকাটি পরের পাতায় দেখানো হল—

গোট	দাগচিহ্ন	বারংবারতা
0 – 10	卌 ||	7
10 – 20	卌 ||||	9
20 – 30	卌 卌 |	11
30 – 40	卌 卌	10
40 – 50	卌 ||||	9
50 – 60	卌 |||	8
60 – 70	卌 |	6

মোট = 60

তালিকা-4

এভাগে তথ্য উপস্থাপনকে সংগঠিতকরণ বলা হয়। তথ্য বিভাজনের তালিকাটিকে বলা হয় **সংগঠিত বারংবারতা বিভাজন তালিকা (Grouped frequency distribution table)**।

এভাগে বিভাজনের মাধ্যমে যেকোনো অর্থপূর্ণ সিদ্ধান্ত সহজে গ্রহণযোগ্যতা লাভ করে। যেমন—

(i) বেশির ভাগ মানুষই 20 থেকে 30 বছর বয়সের মধ্যে রয়েছে।

(ii) 50 -এর চেয়ে বেশি বয়সের লোকের সংখ্যা হচ্ছে 14।

(iii) 30 বছরের চেয়ে কম বয়সের মানুষের সংখ্যা হল 27।

জেনে নেই এসো

(i) প্রতিটি পরিসর 0 – 10, 10 – 20, 20 – 30 ইত্যাদিকে আমরা এক-একটি শ্রেণি-অন্তর **(Class Interval)** বা সংক্ষেপে শ্রেণি বলি।

(ii) 10 রাশিটি 0 – 10, 10 – 20 এই দুটো শ্রেণিতে থাকার সম্ভাবনা আছে। এই অসুবিধা দূর করার জন্য অর্থাৎ একই সংখ্যা দুটো শ্রেণিতে থাকলে সেই নির্দিষ্ট সংখ্যাটিকে পরের শ্রেণির অন্তর্গত করে নেওয়া হয়। যেমন . 10, এই রাশিটি 10 – 20 এই শ্রেণিতে অন্তর্ভুক্ত হবে, 0 – 10এই শ্রেণিতে নয়। একইভাবে 20 শ্রেণি অন্তর 20 – 30 এ থাকবে, 10 – 20এ নয়।

(iii) যেকোনো একটি অন্তর যেমন, 10 – 20 এর **নিম্ন সীমা (Lower limit)** 10 এবং **উচ্চ সীমা (Upper limit)** 20।

(iv) এই শ্রেণি অন্তরের উচ্চ শ্রেণি সীমা ও নিম্ন শ্রেণি সীমার মধ্যে পার্থক্যকে **শ্রেণি দৈর্ঘ্য (class width)** বলা হয়। যেমন 0 – 10 এর শ্রেণি দৈর্ঘ্য 10 – 0 = 10; 10 – 20 এর শ্রেণি দৈর্ঘ্য = 20 – 10 = 10 ইত্যাদি। উপরের উদাহরণটিতে শ্রেণি দৈর্ঘ্য 10।

উদাহরণ 1 ঃ

4 নম্বর তালিকাটি থেকে নীচের প্রশ্নগুলোর উত্তর করো—

(i) শ্রেণি-অন্তরগুলোর শ্রেণি দৈর্ঘ্য কত ?

(ii) কোন শ্রেণিটির বারংবারতা সবচেয়ে বেশি ?

(iii) কোন শ্রেণিটির বারংবারতা সবচেয়ে কম ?

(iv) 40 – 50 শ্রেণি অন্তরের উচ্চ সীমা কত ?

(v) কোন দুটি শ্রেণির বারংবারতা একই ?

সমাধান .

(i) শ্রেণি-অন্তরগুলোর দৈর্ঘ্য = 10
(কারণ, 10 - 0 = 10, 20 - 10 = 10, 30 - 20 = 10 .....)

(ii) 20 - 30 – শ্রেণিটির বারবারতা সবচেয়ে বেশি।

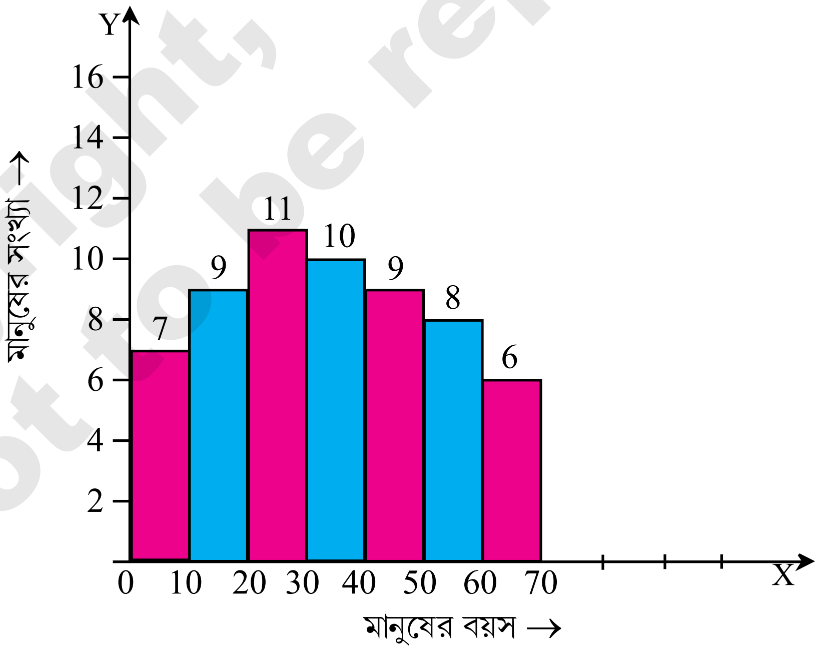
(iii) 60 - 70 – শ্রেণিটির বারবারতা সবচেয়ে কম।

(iv) 40 - 50 শ্রেণির উচ্চসীমা 50

(v) 10 - 20 এবং 40 - 50 এই দুটি শ্রেণির বারংবারতা একই।

5.7 দণ্ডচিত্র বা স্তম্ভলেখ (Histogram) :

4 নম্বর তালিকার প্রদর্শিত বারংবারতা বিভাজন তালিকাটি ব্যবহার করে নীচের চিত্রটির মতো একটি দণ্ডচিত্র আঁকো।



চিত্র নং 5.3

চিত্র 5.1 এবং চিত্র 5.3র মধ্যে পার্থক্যগুলি লক্ষ করো।

5.3 চিত্রে আমরা বয়সের শ্রেণিকে (শ্রেণি-অন্তর) অনুভূমিক রেখায় উপস্থাপন করেছি এবং উলম্ব রেখা অর্থাৎ দণ্ডগুলো উচ্চতা শ্রেণি অন্তরের বারংবারতা বুঝিয়েছে। এখানে দুটি শ্রেণি অন্তরের মধ্যে কোনো ব্যবধান নেই। তাই দুটো দণ্ডের মধ্যেও কোনো ব্যবধান নেই। তথ্যের এই জাতীয় লৈখিক উপস্থাপনকে 'স্তম্ভলেখ' বা 'হিস্টোগ্রাম' বলা হয়।

অন্যদিকে 5.1নং চিত্রে পৃথক পৃথক শিক্ষাবর্ষের ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা দেখানোর জন্য দণ্ডগুলি ব্যবহার করা হয়েছে, অর্থাৎ একটি বছরের তথ্যের সঙ্গে অন্য বছরের তথ্যের কোনো সম্বন্ধ নেই। সুতরাং দণ্ডগুলো একসঙ্গে যুক্ত করে উপস্থাপন করার কোনো প্রয়োজন নেই।

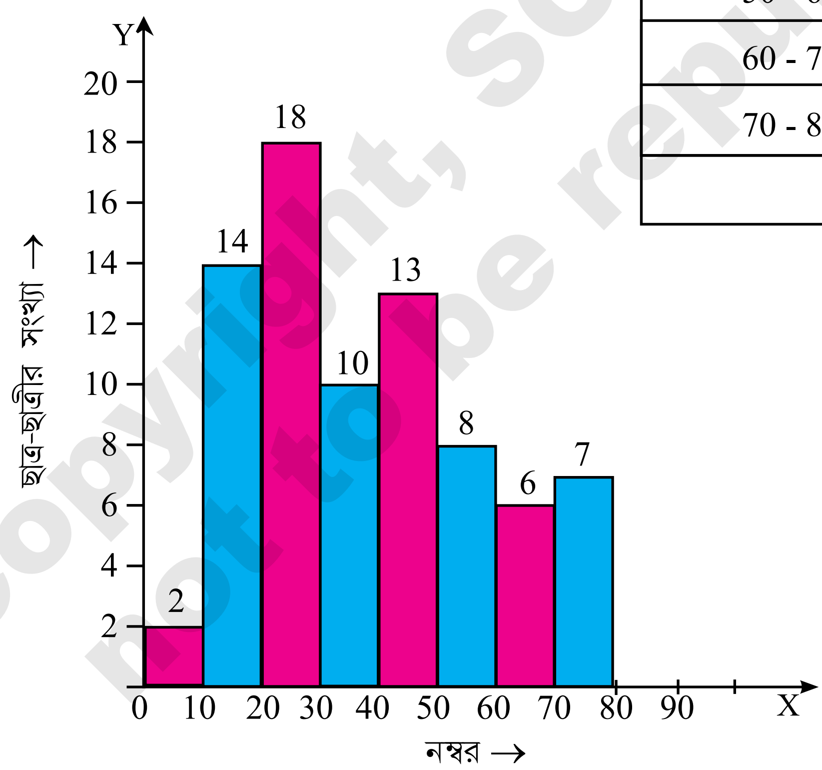
উদাহরণ 2 ঃ

গণিত অলিম্পিয়াড পরীক্ষায় একটি কেন্দ্রে 78জন পরীক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বরের তালিকা পাশে দেওয়া হল—

শ্রেণি-অন্তর (নম্বরের হিসেব)	বারংবারতা (ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা)
0 - 10	2
10 - 20	14
20 - 30	18
30 - 40	10
40 - 50	13
50 - 60	8
60 - 70	6
70 - 80	7
মুঠ	78

তালিকা-5

তালিকাটি স্তম্ভলেখ বা হিস্টোগ্রামের সাহায্যে প্রকাশ করি এসো—



চিত্র নং 5.4

স্তম্ভলেখ থেকে নীচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও ঃ

(i) 30 বা তার চেয়ে বেশি এবং 60 থেকে কম নম্বর মোট কতজন ছাত্রছাত্রী পেয়েছে?

(ii) 60 বা তার চেয়ে বেশি নম্বর প্রাপ্ত ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা কত?

(iii) সবচেয়ে বেশি ছাত্রছাত্রী কোন শ্রেণি-অন্তরে রয়েছে?

সমাধান ঃ

(i) 31 জন (ii) 13 জন (iii) 20-30

অনুশীলনী 5.1

1. অষ্টম শ্রেণিতে 46 জন ছাত্র-ছাত্রীর রয়েছে। সাদা, লাল, কালো ও হলুদ এই চারটি রঙের মধ্যে কোন রংটি কার পছন্দ সেটা নীচের তালিকায় দেওয়া হল। প্রত্যেকজন ছাত্রছাত্রী কেবলমাত্র একটি রং-ই বাছতে পারবে এবং সেই রংগুলো W, R, B ও Y বর্ণের মাধ্যমে চিহ্নিত করা হল।

W,	R,	R,	Y,	B,	B,	B,	Y,	R,	W,	W,	R
Y,	B,	B,	Y,	B,	R,	R,	W,	B,	B,	R,	Y,
Y,	B,	W,	Y,	Y,	R,	W,	W,	R,	R,	B,	B,
R,	Y,	B,	W,	W,	B,	Y,	B,	W,	W		

দাগচিহ্ন ব্যবহার করে একটি বারংবারতা বিভাজন তালিকা প্রস্তুত করো এবং এটা ব্যাখ্যা করা জন্য একটি দণ্ডচিত্র অংকন করো।

2. 'জোনাকী স্বনির্ভরশীল গোষ্ঠ'র 35 জন সদস্য প্রতিমাসে যত টাকা করে জমা রেখেছে তার একটি তালিকা নীচে দেওয়া হল

110,	125,	110,	140,	150,	150,	150,	110,	180,	180,	110,
140,	140,	120,	120,	120,	140,	140,	170,	175,	175,	145,
145,	140,	175,	120,	125,	130,	135,	135,	165,	145,	145,
175,	185.									

110 - 120, 120 - 130, 130 - 140 .... ইত্যাদি শ্রেণি-অন্তর হিসেবে ভাগ করে দাগ চিহ্ন ব্যবহারেৰ মাধ্যমে বারংবারতা তালিকা প্রস্তুত করো।

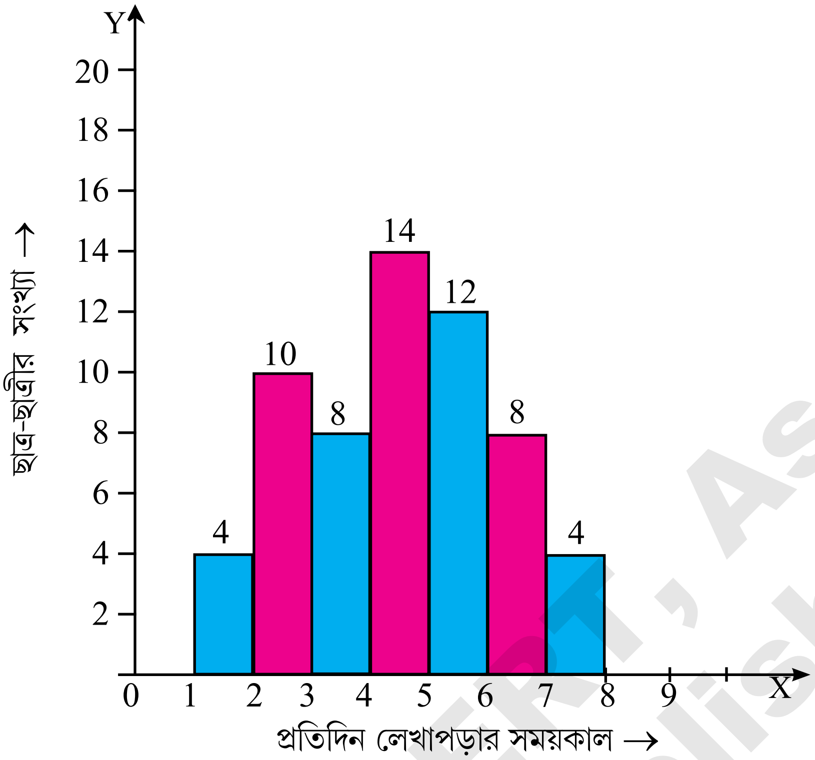
3. 2 নং প্রশ্নে যে তথ্যগুলোর ওপর ভিত্তি করে বারংবারতা তালিকাটি প্রস্তুত করা হয়েছিল সেটা কাজে লাগিয়ে একটি স্তম্ভলেখ বা হিস্টোগ্রাম প্রস্তুত করো এবং নীচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

(i) কোন শ্রেণি-অন্তরটিতে সবচেয়ে বেশি সদস্য আছে?

(ii) 150 বা তার চেয়ে বেশি টাকা জমা রাখা মোট সদস্যের সংখ্যা কত?

(iii) কোন কোন শ্রেণি-অন্তরে সদস্য সংখ্যা কত?

4. একটি বিদ্যালয়ের অষ্টম শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীরা প্রত্যেকে রোজ কত সময় পড়াশোনা করে (ঘন্টার হিসেবে) সেটা পরবর্তী স্তম্ভলেখের সাহায্যে দেখানো হয়েছে—



চিত্র নং 5.5

স্তম্ভলেখের সাহায্যে উত্তর দাও—

(i) অধিকাংশ ছাত্র-ছাত্রীরা রোজ কতটুকু সময় লেখাপড়া করে?

(ii) রোজ 5 ঘণ্টার চেয়ে বেশি পড়াশোনা করা ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা কত?

(iii) 4 ঘণ্টা থেকে কম লেখাপড়া করা ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা কত?

5. 30 জন ছাত্র-ছাত্রীর উচ্চতা (সেমি হিসেবে) নীচে দেওয়া হল —

136, 138, 140, 140, 154, 160, 158, 147, 139, 153, 162,
162, 173, 137, 142, 156, 162, 164, 185, 143, 145, 182,
152, 163, 174, 138, 142, 152, 144, 146.

ভাবমতো শ্রেণি-অন্তর নিয়ে দাগ চিহ্নের মাধ্যমে বারংবারতা বিভাজন তালিকাটি প্রস্তুত করো।

5.8 বৃত্তচিত্র বা পাইচিত্র (Circle Graph or Pie Chart)

অনিমেষ দিনটির 24 ঘণ্টা কী কী করে দেখে নেই এসো—

(i) ঘুমোয় — 8 ঘণ্টা

(ii) পড়াশোনা করে — 5 ঘণ্টা

(iii) স্কুলের সময় — 6 ঘণ্টা

(iv) খেলার সময় — 2 ঘণ্টা

(v) অন্যান্য — 3 ঘণ্টা

অনিমেষের গোটাদিনের কাজটুকু একটি পাইচিত্রের সহায়ে খুব সহজভাবে সুন্দর করে দেখাতে পারি।

5.8.1 পাই চিত্র অংকন (Drawing pie chart) ঃ

উপরের উদাহরণটিতে অনিমেষের গোটাদিনের কাজটুকু কীভাবে বৃত্তাংশে ভাগ করতে পারি দেখে নেই এসো—

আমরা জানি যে একটি বৃত্তের পরিধি কেন্দ্রে 360^0 কোণ উৎপন্ন করে। এবার 24 ঘণ্টাকে 360^0-এর সঙ্গে তুলনা করে সময়ের সঙ্গে ডিগ্রির সম্বন্ধ স্থাপন করি এসো—

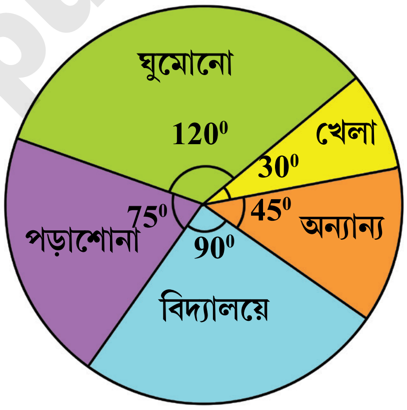
(i) অনিমেষের ঘুমোনোর সময় = 24 ঘণ্টার 8 ঘণ্টা, অতএব কেন্দ্রে কোণটি হবে = $\frac{8}{24}\times 360^0 = 120^0$

(ii) লেখাপড়ার সময় = $\frac{5}{24}\times 360^0 = 75^0$

(iii) স্কুলের সময় = $\frac{6}{24}\times 360^0 = 90^0$

(iv) খেলার সময় = $\frac{2}{24}\times 360^0 = 30^0$

(v) অন্যান্য = $\frac{3}{24}\times 360^0 = 45^0$



চিত্র নং 5.6

কেন্দ্রীয় কোণগুলি নির্ণয় করার পর যেকোনো সুবিধাজনক ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত এঁকে চাঁদার সাহয্যে ভাগগুলো চিহ্নিত করতে হয়।

এভাবে তথ্যগুলোকে বৃত্তাংশে ভাগ করে দেখানো চিত্রকে **পাইচিত্র বা বৃত্তচিত্র** বলে। দণ্ডচিত্রের মতো পাইচিত্রের মাধ্যমেও তথ্য প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ 3 ঃ আন্তঃবিদ্যালয় ক্রিকেট প্রতিযোগিতায় একটি স্কুলের 4জন ছাত্রের ব্যাটিং প্রদর্শন নিম্নরূপ ঃ

(i) আরিফুল	70 রান
(ii) পরমজিৎ	65 রান
(iii) রাজু	30 রান
(iv) জোসেফ	15 রান
মোট	180 রান

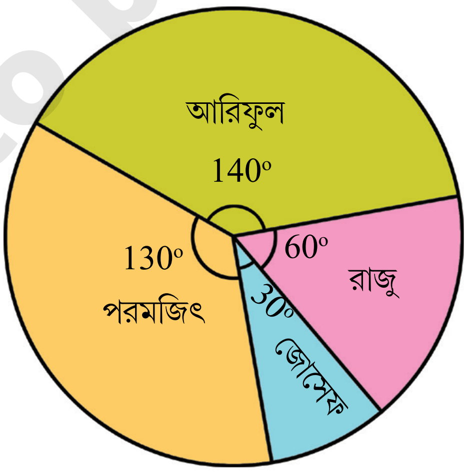
এই তথ্যটুকু নিয়ে একটি পাইচিত্র অঙ্কন করো।

সমাধান ঃ প্রতিটি ভাগের জন্য আমরা কেন্দ্রীয় কোণের পরিমাণ বের করে নেই। এখানে মোট রান $=180$ রান।

আমরা তালিকাটি এরকম পাচ্ছি-

ব্যাট্স্‌ম্যানের নাম	সংগৃহীত রান	অনুপাত	কেন্দ্রীয় কোণ
আরিফুল	70	$\frac{70}{180}$	$\frac{70}{180}\times 360^0 = 140^0$
পরমজিৎ	65	$\frac{65}{180}$	$\frac{65}{180}\times 360^0 = 130^0$
রাজু	30	$\frac{30}{180}$	$\frac{30}{180}\times 360^0 = 60^0$
জোসেফ	15	$\frac{15}{180}$	$\frac{15}{180}\times 360^0 = 30^0$

এবার আমরা তালিকাটি পাইচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করি এসো—



উদাহরণ 4 ঃ একজন লোক তার মাসিক বেতন থেকে বিভিন্ন খাতে কত খরচ ও জমা করেছেন তার হিসেব শতাংশে দেওয়া হল—

সঞ্চয় = 25%

ছেলে-মেয়ের শিক্ষা = 25%

খাদ্য = 30%

অন্যান্য = 20%

এই তথ্যটুকু পাইচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করো।

সমাধান ঃ প্রতিটি শতাংশের জন্য আমরা কেন্দ্রীয় কোণের পরিমাণ বের করে নেই এসো—

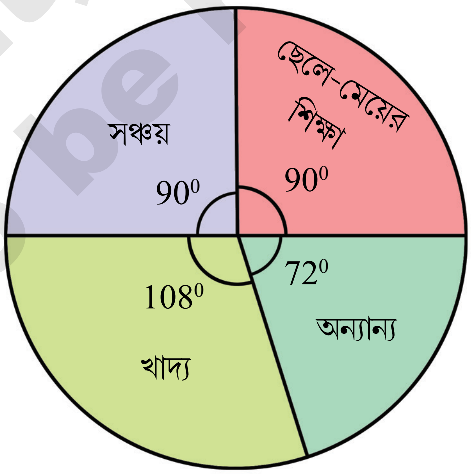
সঞ্চয় = 360^0র 25% = $360^0 \times \frac{25}{100} = 90^0$

ছেলে-মেয়ের শিক্ষা = 360^0র 25% = $360^0 \times \frac{25}{100} = 90^0$

খাদ্য = 360^0র 30% = $360^0 \times \frac{30}{100} = 108^0$

অন্যান্য = 360^0র 20% = $360^0 \times \frac{20}{100} = 72^0$

এবার আমরা কোণগুলো পাইচিত্রে প্রকাশ করি এসো—

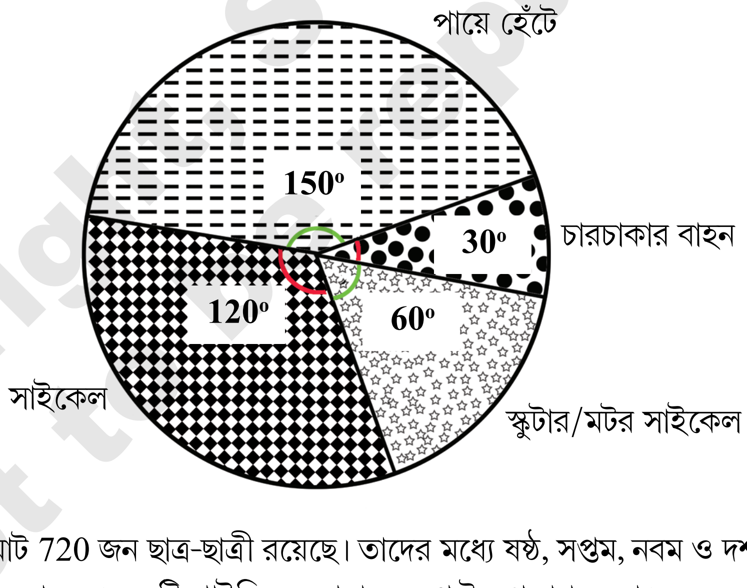


অনুশীলনী 5.2

1. নীচে 60 জন মানুষের প্রত্যেকের প্রিয় খেলার একটি তথ্য দেওয়া হয়েছে। তথ্যটুকুর সাহায্যে একটি পাইচিত্র অঙ্কন করো

খেলার নাম	মানুষের সংখ্যা
ক্রিকেট	20
ফুটবল	18
কাবাডি	12
ব্যাডমিন্টন	10

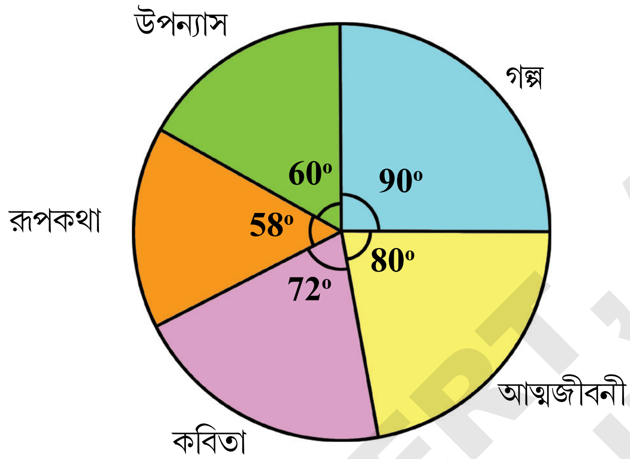
2. একটি ফুটবল ম্যাচ উপভোগ করতে 600 মানুষ মাঠে উপস্থিত হয়েছেন। মাঠে আসার সময় অনেকেই পায়ে হেঁটে এসেছেন এবং অনেকেই বিভিন্ন যানবাহন নিয়ে এসেছেন। এই সমস্ত ব্যক্তিদের সংখ্যা নীচে একটি পাইচিত্রের সাহায্যে দেখানো হল।
চিত্রটি দেখে প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও—
(i) কতজন মানুষ পায়ে হেঁটে এসেছেন?
(ii) স্কুটার/মটর সাইকেলে আসা এবং চার চাকার বাহনে আসা মানুষদের সংখ্যার মধ্যে পার্থক্য কত?
(iii) 200 জন মানুষ কোন বাহন ব্যবহার করেছিল?



3. একটি স্কুলে মোট 720 জন ছাত্র-ছাত্রী রয়েছে। তাদের মধ্যে ষষ্ঠ, সপ্তম, নবম ও দশম শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা নীচে দেওয়া হল। একটি পাইচিত্রের সাহায্যে তথ্যটুকু প্রকাশ করো।

শ্রেণি	ষষ্ঠ	সপ্তম	অষ্টম	নবম	দশম	মোট
ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা	120	140	200	80	180	720

4. একটি ক্লাসের 180 জন ছাত্র-ছাত্রীর মধ্যে কে কে গল্প, উপন্যাস, রূপকথা, কবিতা ও আত্মজীবনী পড়তে ভালোবাসে সেই তথ্যটুকু একটি পাইচিত্রে দেখানো হয়েছে। ছবিটি দেখে নীচের প্রশ্নগুলোর উত্তর লেখো।
   (i) কতজন ছাত্রছাত্রী উপন্যাস পড়তে ভালোবাসে?
   (ii) অধিকাংশ ছাত্রছাত্রীরা কী পড়তে ভালোবাসে এবং তাদের সংখ্যা কত?
   (iii) কবিতা ও আত্মজীবনী পড়তে ভালোবাসা মোট ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা কত?



5. একটি ফল বাগানের বিভিন্ন রকমের গাছের সংখ্যা নিম্নরূপ—

আম	30 টি
কাঁঠাল	50 টি
পেয়ারা	20 টি
মোট	100 টি

প্রতিটি ভাগের কেন্দ্রীয় কোণের পরিমাণ নির্ণয় করো এবং সেই তথ্যটুকু একটি পাইচিত্রের সাহায্যে অঙ্কন করো।

5.9 সুযোগ ও সম্ভাব্যতা (Chance and Probability)

নীচের বাক্যগুলি একটু লক্ষ করো—

(i) আগামী তিনদিনের মধ্যে বৃষ্টি হওয়ার একেবারে সম্ভাবনা নেই।

(ii) ফুটপাত দিয়ে যাওয়া এক পথচারীকে দুর্ভাগ্যজনকভাবে একটি নিয়ন্ত্রণহীন গাড়ি ধাক্কা দিয়ে মেরে ফেলল।

(iii) জাতীয় গণমোর্চা আগামী নির্বাচনে সরকার গঠন করার সম্ভাবনা প্রবল।

(iv) দুটি এক টাকার মুদ্রা একই সঙ্গে টস করলে কমেও একটি হেড (Head) পাওয়াটা নিশ্চিত।

(v) পড়ে থাকা বিচ্ছিন্ন বিদ্যুৎ পরিবাহী তার হাত দিয়ে স্পর্শ করাটা বিপজ্জনক।

আমরা দৈনন্দিন জীবনে এরকম কথাবার্তা প্রায়ই শুনে থাকি। এই বাক্যগুলোতে আশংকা, সন্দেহ, বিশ্বাস ইত্যাদি ভাব ব্যক্ত হয়েছে। কোনো বিষয় সম্পর্কে সম্পূর্ণ জ্ঞান বা তথ্যের অভাব হলে আমরা চূড়ান্ত সিদ্ধান্ত নেওয়ার ক্ষেত্রে অনেক ভাবি। তথাপি প্রয়োজনের খাতিরে আমরা নিজেদের আংশিক জ্ঞান বা তথ্যের ভিত্তিতে কাঙ্ক্ষিত ফল লাভের জন্য সিদ্ধান্ত গ্রহণ করি। এক্ষেত্রে কোনো অনিশ্চিত বা অজ্ঞাত কারণ বা সুযোগের (যা সাধারণ লোকের ভাষায় দৈব বা ভাগ্য বলে ধরা হয়) ওপর নির্ভর করি।

যখন ধারণা করা হল যে আগামী দুই-তিনদিনের মধ্যে বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা নেই, সেটা আসলে বিগত কয়েক দিনের আবহাওয়ার গতিপ্রকৃতি সম্পর্কে পূর্ব অভিজ্ঞতাকে আশ্রয় করে নেওয়া ধারণা। অর্থাৎ বর্তমান সময়ের মতো আবহাওয়ার অবস্থা আগে যতবার হয়েছিল, সেক্ষেত্রে অধিকাংশ সময়ই বৃষ্টিপাত হয়নি। তাই আগামী দুই-তিনদিনে বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা নেই বলে অনুমান করা হয়েছে। এটা কেবলমাত্র অনুমান। বৃষ্টি হলে হতেও পারে। এমন আবহাওয়ায় যে কখনো বৃষ্টি হয়নি, তা নয়।

পথচারীর ক্ষেত্রে যে ঘটনাটি ঘটল সেটা আকস্মিক ও অনাকাঙ্ক্ষিত। ফুটপাত দিয়ে তিনি অনেকবার যাতায়াত করেছেন এবং ফুটপাতে নিয়ন্ত্রণহীন গাড়ি এসে যে ধাক্কা মারতে পারে সে ধরনের পরিস্থিতির তিনি মুখোমুখি হননি কখনো। ফলে পরম নির্ভয়ে ও নিশ্চিন্তে তিনি ফুটপাত দিয়ে হেঁটে যাচ্ছিলেন, অথচ দুর্ঘটনাটি ঘটে গেল।

জাতীয় গণমোর্চার সরকার গঠনের সম্ভাবনার ক্ষেত্রে আমরা জনমত সমীক্ষার (Opinion Poll) ওপর নির্ভর করি। অর্থাৎ নির্বাচক জনসাধরণের কাছ থেকে যদৃচ্ছভাবে সংগৃহীত মতামত জাতীয় গণমোর্চার সপক্ষে থাকলে আমরা অনুমান করতে পারি যে তারাই সরকার গঠন করতে পারে।

এরকম বিভিন্ন উদাহরণ দেওয়া যেতে পারে যেখানে আমরা সমস্ত তথ্য না পেলেও প্রাপ্ত তথ্যের ভিত্তিতে কতগুলি সম্ভাবনা অনুমান করতে পারি। অতএব মূল কথা হচ্ছে, কোনো একটি বিষয়ে অনুমান করতে হলে আমাদের অভিজ্ঞতা বা তথ্যের প্রয়োজন এবং সেই তথ্যগুলি এরকম বিভিন্ন অনুসন্ধান বা পরীক্ষা করে লাভ করতে পারি।

5.10 যাদৃচ্ছিক পরীক্ষা ও ফলফল (Random Experiment and Outcomes)

একটি পরিচিত বিষয় উদাহরণ হিসেবে নিচ্ছি—

একটি ক্রিকেট খেলায় কোন দল প্রথমে ব্যাটিং করবে বা বলিং করবে সেটা নির্ণয় করার জন্য আম্পায়ার কী করে থাকেন সেটা তোমরা নিশ্চয় দেখেছ। একটি মুদ্রা টস (tossed) করা হয় এবং দুই দলের অধিনায়ককে বলতে বলা হয় যে তারা কোন পাশটা নেবেন এবং যে অধিনায়ক এই টসে জয়ী হল তিনি সিদ্ধান্ত নেওয়ার সুবিধাটা পান। এই যে, মুদ্রার সাহায্যে টস করা হল, এটাকে বলা হয় যাদৃচ্ছিক পরীক্ষা (Random Experiment)। এই পরীক্ষাটির বৈশিষ্ট্য হচ্ছে (i) একইভাবে বারবার সম্পন্ন করা যায়। (ii) টস করার পর মুদ্রার একটি পাশ ওপর দিকে এবং অন্যটি নীচের দিকে পড়ে। কিন্তু কোন দিকটি ওপরদিকে এবং কোনটি নীচের দিকে পড়ে সেটা আমরা আগে থেকে জানি না। অর্থাৎ হেড ও টেইল পাওয়ার ক্ষেত্রে যে অনিশ্চয়তা, সেটা দুটোর ক্ষেত্রেই সমান।

মুদ্রা টস করা বা যাদৃচ্ছিক পরীক্ষাটির দ্বারা হেড অথবা টেইল পাওয়া ছাড়াও আরো কিছু পেলাম কি? আমরা অভিজ্ঞতা থেকে বলতে পারি যে হেড অথবা টেল ছাড়া অন্য কিছু পাই না। অতএব এই মুদ্রার টসের সঙ্গে দুটো ফল (Result বা Outcome) জড়িত রয়েছে— হেড H (Head) ও টেইল T (Tails)। অতএব কোনো একটি যাদৃচ্ছিক পরীক্ষার সঙ্গে কতগুলো নির্দিষ্ট ফল (Outcome) জড়িত থাকে।

দুটো মুদ্রা একসঙ্গে টস করা কার্যটিও একটি যাদৃচ্ছিক পরীক্ষা। এই পরীক্ষাটির সঙ্গে জড়িত ফলগুলি কী হবে বলতে পার কি? লক্ষ করো, প্রতিটি মুদ্রার টসের সঙ্গে জড়িত ফল হচ্ছে হেড অর্থাৎ H এবং টেইল অর্থাৎ T। এবার প্রথমটিতে H পেলে দ্বিতীয়টি আবার H পাওয়া যেতে পারে। দুটো মুদ্রা এক সঙ্গে টস করার পর দুটোতেই যদি ফলাফল হেড হয় তবে এই ফলটিকে আমরা HH দিয়ে বোঝাতে পারি। অতএব এই পরীক্ষাটির সঙ্গে জড়িত ফলাফলগুলি এরকম হতে পারে

HH, HT, TH, TT

একটু ভেবে বল

(a) লুডো খেলার সময় গুটির চালগুলোর দ্বারা যাদৃচ্ছিক পরীক্ষা হবে কি? এই পরীক্ষার সঙ্গে জড়িত ফলাফলগুলো কী হবে?

(b) দোতালা বাড়ি থেকে নীচে নামার জন্য সিঁড়ি রয়েছে। একজন মানুষ সিঁড়ি দিয়ে না নেমে যদি নীচে ঝাঁপ দেয় তবে সম্ভাব্য ফল কী কী হতে পারে? সিঁড়ি দিয়ে নামা এবং ঝাঁপ দেওয়ার ক্ষেত্রে ফলাফলের অনিশ্চয়তার পরিমাণ একই হবে কি? নীচে নামার জন্য তোমার নিজের ক্ষেত্রে কী সিদ্ধান্ত নেবে?

(c) দুটি মুদ্রা একই সঙ্গে টস করা হল।

(i) দুটো হেড একসঙ্গে পাওয়ার এবং শুধুমাত্র হেড পাওয়ার সুযোগ একই হবে কি?

(ii) দুটো হেড ও দুটি টেইল একসঙ্গে পাওয়ার সুযোগ একই হবে কি?

5.11 সমসম্ভাব্য ফল (Equally likely outcomes)

আমরা এর আগে বলেছি যে একটি মুদ্রা টস করলে হেড বা টেইল দুটো পাওয়ার সম্ভাবনা সমান, যদি মুদ্রাটি সুষমভাবে সুগঠিত (unbiased) হয় এবং টস করার সময় যদি নিরপেক্ষতা অবলম্বন করা হয়। কিন্তু প্রতিবার টসের সময় হেড অথবা টেইল যে কোনো একটা ফলাফলই পাওয়া যাবে। এবার টসের সংখ্যা বৃদ্ধি করে চললে কী হতে পারে দেখে নেই—

টসের সংখ্যা	হেডের সংখ্যা	টেইলের সংখ্যা
10	3	7
20	7	13
30	12	18
40	18	22
50	24	26

তোমরা লক্ষ করলে যে টসের সংখ্যা বেড়ে যাওয়ার সঙ্গে সঙ্গে হেড এবং টেইল পাওয়ার সংখ্যাও প্রায় সমান সমান হতে চলেছে। অর্থাৎ হেড ও টেইল পাওয়ার ফলগুলি হচ্ছে সমসম্ভাব্য।

নিজে চেষ্টা করো (Do yourself) :

একটি লুডোর গুটি 100 বার চাল দাও এবং যে ফলাফল পেলে সেটা পরের পাতার টেবিলটিতে বসাও।

টসের সংখ্যা	ফলাফলের সংখ্যা					
	1	2	3	4	5	6
100						

ফলাফল পরীক্ষা করো। এগুলো সমসম্ভাব্য কি না পরীক্ষা করে দেখো।

5.12 সুযোগ থেকে সম্ভাব্যতা পর্যন্ত (Linking chances to probability) :

একটি নিখুঁত মুদ্রার সাহায্যে টসের মাধ্যমে করা যাদৃচ্ছিক (Random) পরীক্ষাটি আবার একবার ভালো করে লক্ষ করি এসো।

মুদ্রাটির দুই পৃষ্ঠের একটিতে হেড ও অন্যটিতে টেইল রয়েছে। একটি সমান জায়গায় মুদ্রাটি টস করলে এর দুই পৃষ্ঠের মধ্যে একটি পিঠ ওপরের দিকে থাকবে। ওপরের পৃষ্ঠাটি হেডও হতে পারে, আবার টেইলও হতে পারে। অর্থাৎ মুদ্রাটির টসের সঙ্গে জড়িত পরীক্ষাটির মোট ফলপ্রাপ্তি দুই ধরণের, হেড এবং টেইল। কেবল এক পৃষ্ঠে হেড রয়েছে বলে হেড পাওয়ার সুযোগ 1। একইভাবে টেইল পাওয়ার সুযোগও 1। পরীক্ষাটিতে ফলপ্রাপ্তির মোট সংখ্যা 2 এবং হেড প্রাপ্তির সংখ্যা 1, উভয়েই নির্দিষ্ট। অতএব—

$$\frac{\text{হেড পাওয়ার সংখ্যা}}{\text{পরীক্ষাটিতে ফলপ্রাপ্তির মোট সংখ্যা}} = \frac{1}{2}$$

এই অনুপাতটিও নির্দিষ্ট ও এটা মুদ্রাটি টস করে পাওয়া মোট ফল সাপেক্ষে হেড প্রাপ্তির সুযোগের এক আপেক্ষিক মান দেয়। এই অনুপাতটিকে হেড প্রাপ্তির সম্ভাব্যতা বলা হয়।

অর্থাৎ, মুদ্রার টস পরীক্ষাটির হেড প্রাপ্তির সুযোগ 1 অতএব হেড প্রাপ্তির সম্ভাব্যতা $\frac{1}{2}$

একইভাবে, মুদ্রার টস পরীক্ষাটির টেইল প্রাপ্তির সুযোগ 1 অতএব টেইল প্রাপ্তির সম্ভাব্যতা $\frac{1}{2}$

এবার যাদৃচ্ছিক পরীক্ষার অন্য একটি উদাহরণ দেখে নেই এসো—

ধরা হল একটি ব্যাগে 10 টি মার্বেল আছে এবং ভিতরে 3 টি কালো, 5 টি হলুদ এবং 2টি মার্বেল লাল। ব্যাগটিতে মার্বেলগুলো ভালো করে মিশিয়ে নিয়ে যদৃচ্ছভাবে একটি মার্বেল ব্যাগ থেকে বের করে আনলে। মার্বেলটি তুমি কত রকম করে বাছতে পারবে এবং বের করে আনা মার্বেলটির রং লাল হওয়ার সম্ভাবনা কত?

প্রথমে লক্ষ করবে যে ব্যাগটিতে 10টি মার্বেল রয়েছে। অতএব তুমি বের করে আনা মার্বেলটি 10টি মার্বেলের যেকোনো একটি হতে পারে অর্থাৎ ফলপ্রাপ্তির মোট সংখ্যা হবে 10, অন্যদিকে ব্যাগটিতে লাল মার্বেল রয়েছে 2 টি। অতএব তোমার হাতে এই 2টি মার্বেলের যেকোনো একটি আসতে পারে। অর্থাৎ, লাল মার্বেল প্রাপ্তির জন্য সুযোগ 2 । এই ক্ষেত্রে ব্যাগটি থেকে লাল মার্বেল পাওয়ার সম্ভাব্যতা $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

একইভাবে কালো মার্বেল প্রাপ্তির সুযোগ হবে 3 এবং সম্ভাব্যতা হবে $\frac{3}{10}$

এবার ব্যাগটি থেকে হলুদ মার্বেল পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত হবে নিজে চিন্তা করে দেখো।

মনে রাখবে, কোনো যাদৃচ্ছিক পরীক্ষার সঙ্গে জড়িত কোনো একটি ফলাফলের সম্ভাব্যতা হল

$$\frac{\text{ফলটি পাওয়ার সুযোগ অর্থাৎ ফলের সম্ভাব্য সংখ্যা}}{\text{পরীক্ষাটি থেকে পেতে পারা ফলের মোট সংখ্যা}}$$

উদাহরণ 5 ঃ একটি লুডোর ডাইস নাও যার দুই দিকে একটি করে বিন্দু, তিন দিকে দুটি করে বিন্দু এবং অবশিষ্ট দিকটিতে তিনটি বিন্দু রয়েছে। লুডোর ডাই চেলে নীচের সম্ভাব্যতা নির্ণয় করো যাতে—

(i) একটি বিন্দু পাওয়া যায়।

(ii) দুটি বিন্দু পাওয়া যায়।

(iii) তিনটি বিন্দু পাওয়া যায়।

সমাধান ঃ (i) যেহেতু লুডোর ডাইসের ছয়টি পৃষ্ঠ রয়েছে এবং চাল দিলে তার মাত্র একটি পৃষ্ঠই ওপর দিকে থাকবে, তাই ফল প্রাপ্তির মোট সংখ্যা হচ্ছে 6। অন্যদিকে এর দুই দিকে একটি করে বিন্দু রয়েছে। তাই একটি বিন্দু পাওয়ার সুযোগ হল 2। সুতরাং, একটি বিন্দু পাওয়ার সম্ভাব্যতা হবে $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(ii) একইভাবে দুটি বিন্দু পাওয়ার সুযোগ হল 3 এবং তখন দুটি বিন্দু লাভ করার সম্ভাব্যতা হবে $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(iii) তিনটি বিন্দু প্রাপ্তির সুযোগ 1। অতএব তিনটি বিন্দু প্রাপ্তির সম্ভাব্যতা $\frac{1}{6}$

এক্ষেত্রে লক্ষ করবে যে লুডোর ডাইসটিতে 4টি বিন্দু থাকা একটিও দিক নেই। অতএব 4টি বিন্দু প্রাপ্তির সম্ভাব্যতা $\frac{0}{6}=0$

উদাহরণ 6 ঃ একটি মুদ্রা ভেবে নেও যার দুই পাশেই হেড রয়েছে। অতএব টস করলে হেড পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত? আবার টেইল পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান ঃ মুদ্রাটি টস করলে দুই পাশের মধ্যে একটি দিক ওপর দিকে থাকবে। অতএব মুদ্রাটি টসের ফলে ফল প্রাপ্তির সংখ্যা 2

আবার, দুই পৃষ্ঠেই হেড থাকার জন্য হেড পাওয়ার সুযোগও 2, অতএব হেড পাওয়ার সম্ভাব্যতা হচ্ছে

$$\frac{\text{হেড প্রাপ্তির সুযোগ}}{\text{ফলপ্রাপ্তির মোট সংখ্যা}}=\frac{2}{2}=1$$

লক্ষ্য করো, এখানে মুদ্রাটি যতবারই টস করো না কেন, ফলাফলটি কিন্তু নিশ্চিত, অর্থাৎ হেড পাওয়া যাবেই। এবং এক্ষেত্রে হেড পাওয়ার সম্ভাব্যতা 1এর সমান। অতএব বলা যেতে পারে যে একটি নিশ্চিত ফলের সম্ভাব্যতা সর্বদা 1এর সমান।

অন্যদিকে, টেইল পাওয়ার সম্ভাব্যতা = $\dfrac{\text{টেইল প্রাপ্তির সুযোগ}}{\text{ফলপ্রাপ্তির মোট সংখ্যা}} = \dfrac{0}{2} = 0$

5.13 ফল ও ঘটনা (Result and Event)

একটি যাদৃচ্ছিক পরীক্ষার সঙ্গে জড়িত ফলাফলের যেকোনো সংগ্রহই একটি ঘটনার সৃষ্টি করে। যেমন টসের সঙ্গে জড়িত একটি মুদ্রার ফল দুটি হেড ও টেইল। এবার —

(i) হেড পাওয়াটা একটি ঘটনা

(ii) টেইল পাওয়া অন্য একটি ঘটনা

(iii) হেড অথবা টেইল যেকোনো একটি পাওয়াটাও একটি ঘটনা

(iv) হেড অথবা টেইল যেকোনো একটি প্রাপ্ত না হওয়াটাও একটি ঘটনা। অবশ্য এই (iv) ঘটনাটি অসম্ভব কারণ একটি মুদ্রা টস করলে যেকোনো একটি পিঠ ওপর হয়ে পড়বেই। এই জাতীয় ঘটনাকে **অসম্ভব ঘটনা (Impossible Event)** বলা হয়।

একই ভাবে লুডোর ডাইস-চালের পরীক্ষার সঙ্গে জড়িত ফলগুলি হল 1, 2, 3, 4, 5 এবং 6।

এখানে প্রতিটি ফলই এক-একটি ঘটনার সৃষ্টি করে।

কখনো আবার দুই বা ততোধিক ফল একসঙ্গে ঘটেও একটি ঘটনার সৃষ্টি করে থাকে। যেমন— যুগ্ম অর্থাৎ 2, 4, 6 ইত্যাদি প্রাপ্ত ফলগুলি একটি ঘটনার সৃষ্টি করে।

অযুগ্ম সংখ্যা অর্থাৎ 1, 3, 5 প্রাপ্ত ফলগুলোও একটি ঘটনার সৃষ্টি করে।

4 থেকে ছোট সংখ্যা পাওয়া অর্থাৎ 1, 2, 3 প্রাপ্ত ফলগুলোও একটি ঘটনার সৃষ্টি করে।

উদাহরণ 7 ঃ একটি নিখুঁত লুডোর ডাই চালা হল। নীচের ঘটনার দুটি সম্ভাব্যতা নির্ণয় করো—

(i) 4 বা 4 থেকে বড় সংখ্যা প্রাপ্ত হওয়া ঘটনা

(ii) যুগ্ম অথবা অযুগ্ম প্রাপ্ত হওয়া ঘটনা

সমাধান ঃ লুডোগুটির চালের এই পরীক্ষাটির সঙ্গে জড়িত ফলগুলি হল 1, 2, 3, 4, 5 এবং 6।

(i) 4 বা 4 থেকে বেশি সংখ্যাপ্রাপ্ত ফলগুলো হচ্ছে 4, 5, এবং 6।

অর্থাৎ ঘটনাটি ঘটার জন্য সুযোগ 3 টি।

অতএব 4 বা 4 থেকে বড় সংখ্যা প্রাপ্ত হওয়া ঘটনাটির সম্ভাব্যতা হবে $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

(ii) এখানে অযুগ্ম সংখ্যাগুলো হল 1, 3, 5 এবং যুগ্ম সংখ্যাগুলি 2, 4, এবং 6 অর্থাৎ উভয় ধরণের সংখ্যাই ঘটনাটি ঘটার সুযোগ সৃষ্টি করে।

অতএব ঘটনাটি ঘটার ক্ষেত্রে সুযোগ 6

অতএব ঘটনাটির সম্ভাব্যতা $\dfrac{6}{6} = 1$ অর্থাৎ যুগ্ম বা অযুগ্ম সংখ্যা প্রাপ্ত হওয়া ঘটনাটির সম্ভাব্যতা 1 । অন্য ভাবে বলতে গেলে ঘটনাটি অবশ্যই ঘটবে।

5.14 সুযোগ ও সম্ভাব্যতার বাস্তব প্রয়োগ (Application of Chance and Probability in real life):

দৈনন্দিন জীবনে আমরা পদে পদে সুযোগ ও সম্ভাব্যতার ওপর নির্ভরশীল হই। নীচে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হল—

1. ধরে নাও সকাল 10 টায় তুমি ঘর থেকে একটু দূরে অন্য জায়গায় যেতে চাইছ। ঘর থেকে ওই জায়গায় যাওয়ার দুটি পথ রয়েছে, একটি সংক্ষিপ্ত পথ এবং একটি দীর্ঘ। সংক্ষিপ্ত পথটিতে সকাল 9 টা থেকে 12 টা পর্যন্ত যাতায়াতের ক্ষেত্রে যথেষ্ট ভিড় থাকে। দীর্ঘ পথটিতেও কখনো কখনো ভিড় হয়, কিন্তু সংক্ষিপ্ত পথে ভিড়ের সুযোগ বেশি। তুমি পথ বাছাই করার ক্ষেত্রে কী সিদ্ধান্ত নেবে? গন্তব্য স্থানে তাড়াতাড়ি পৌঁছানোর শর্তে সংক্ষিপ্ত পথ ধরে গিয়ে ভিড়ে ফেঁসে যাওয়ার কথা ভেবে তুমি অবশেষে দীর্ঘ পথ দিয়ে যাওয়ার সিদ্ধান্তই নেবে তো?
2. চাষিরা কৃষিকাজ শুরু করার জন্য উপযুক্ত আবহাওয়া অর্থাৎ বৃষ্টির সম্ভাবনীয়তার দিকে নজর রাখতে দেখা যায়। অতএব তাদের কৃষিকার্যেও প্রায় সময়ই সম্ভাব্যতার প্রভাব দেখা যায়।
3. আবহাওয়া দপ্তর বায়ুর চাপ, উত্তাপ, আর্দ্রতা ইত্যাদির অবস্থা পর্যবেক্ষণ করে পূর্বের অভিজ্ঞতার ভিত্তিতে আবহাওয়ার পূর্বাভাস দিতে সক্ষম হয়।

অনুশীলনী 5.3

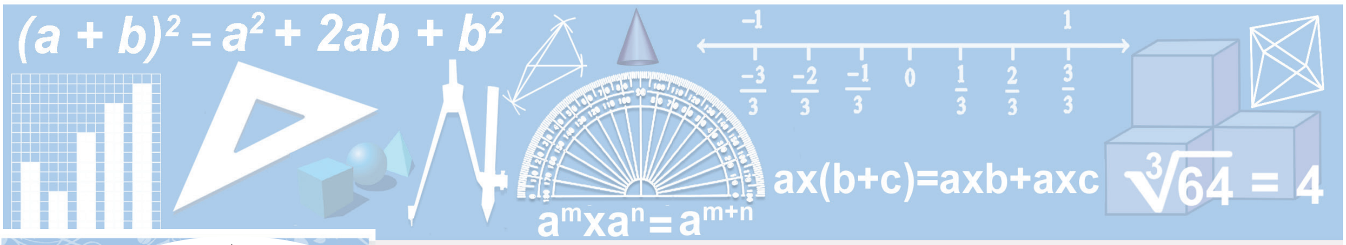
1. আকস্মিক বক্তৃতায় প্রতিযোগীদের জন্য বিচারক গোপনীয়তা রক্ষা করে কাগজের টুকরোয় বিভিন্ন বিষয় লিখে একটি থালায় রাখলেন। বিষয়গুলোকে A, B, C ও D দিয়ে চিহ্নিত করলে প্রতিযোগীতায় বাছাই করার ফলাফল কী হবে, যদি—
   (i) তাকে যে কোনো একটি চিরকুট বাছতে দেওয়া হয়।
   (ii) তাকে যে কোনো দুটি চিরকুট বাছতে দেওয়া হয়।
2. দুটি নিখুঁত মুদ্রা একসঙ্গে টস করলে যে সব ফল পাওয়া যেতে পারে সে সব বেছে বের করো।
3. একটি রং পেন্সিলের বাক্সে 4 টি বেগুনি, 3টি নীল হওয়ার সুযোগ কত? 5 টি লাল রঙের পেন্সিল রয়েছে। মিশ্রিত অবস্থায় থাকা পেন্সিলগুলোর মধ্যে যে কোনো একটি পেন্সিল পছন্দ করলে সেটা (i) বেগুনি (ii) নীল হওয়ার সুযোগ কত?
4. লুডোর ডাই-চালের মাধ্যমে পরীক্ষামূলক কয়েকটি ঘটনা নীচে দেওয়া হল। সংশ্লিষ্ট ফলাফলের সাহায্যে ঘটনাগুলো প্রকাশ করো—
   (i) বর্গ সংখ্যা প্রাপ্তির ঘটনা,
   (ii) 1 থেকে বড় অযুগ্ম সংখ্যা প্রাপ্তির ঘটনা,
   (iii) 6 থেকে বড় যুগ্ম সংখ্যা প্রাপ্তির ঘটনা,
   (iv) মৌলিক সংখ্যা প্রাপ্তির ঘটনা,
   (v) অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যা প্রাপ্তির ঘটনা,
   (vi) যুগ্ম মৌলিক সংখ্যা প্রাপ্তির ঘটনা,
5. একটি ব্যাগে 15টি লাল, 10 টি নীল ও 5টি হলুদ মার্বেল মিশে আছে। ব্যাগটি থেকে যেকোনো একটি মার্বেল বাছতে হলে প্রাপ্ত মার্বেলটি (i) লাল (ii) নীল (iii) হলুদ (iv) নীল বা হলুদ হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

আমরা কী কী শিখলাম

- আমাদের সংগৃহীত তথ্যগুলো সংগঠিত ও অসংগঠিত রূপে থাকতে পারে।
- যেকোনো অর্থপূর্ণ সিদ্ধান্তে উপনীত হতে অসংগঠিত তথ্যগুলি শৃংখলাবদ্ধভাবে সাজিয়ে নেওয়ার দরকার হয়।
- একটি নির্দিষ্ট তথ্য তালিকায় কতবার সন্নিবিষ্ট হচ্ছে সেই সংখ্যাটিই হচ্ছে বারংবারতা।
- শৃংখলাবদ্ধভাবে সংগঠিত তথ্যকে বারংবারতা বিভাজন তালিকায় প্রকাশ করতে পারি।
- অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিবিভাজন অনুসারে তথ্যগুলি দণ্ডচিত্তের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারি।
- পাইচিত্র বা বৃত্তচিত্র ব্যবহার করে তথ্য উপস্থাপন করা যায়।
- কতগুলি পরীক্ষামূলক কার্য রয়েছে যেসব সংগঠিত হওয়ার সুযোগ থাকে সমান।
- একটি যাদৃচ্ছিক (Random) পরীক্ষা-কার্যের ফলাফল আগে থেকে বলা যায় না।
- একটি পরীক্ষা-কার্যের ফলাফলগুলোর সম্ভাবনা সমান হয় যদি প্রত্যেকটি ঘটনা সংঘটিত হওয়ায় একই সমান সুযোগ থাকে।
- সুযোগ ও সম্ভাব্যতার বাস্তবজীবনের সঙ্গে সম্বন্ধ রয়েছে।
- একটি ঘটনার সম্ভাবনীয়তা $= \dfrac{\text{ফল প্রাপ্তির সুযোগ}}{\text{পরীক্ষাটি থেকে প্রাপ্ত মোট ফলের সংখ্যা}}$।

❑❑❑

- The person who does the work is the only one who learns.
- Mistakes are the proof that you are trying.
- Just because something is difficult, doesn't mean you shouldn't try. It just means you should try HARDER.

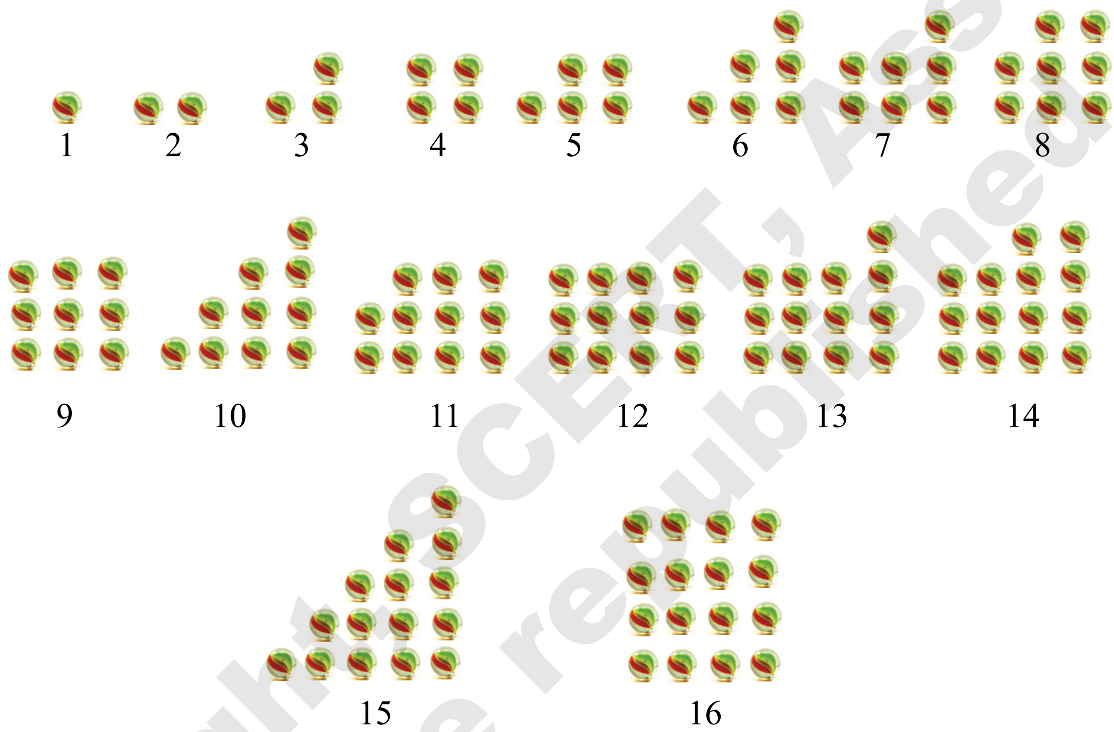


অধ্যায়- 6

বর্গ ও বর্গমূল
(Squares and Square Roots)

A4R8C9

6.1 নীচের সাজানো মার্বেলগুলির দিকে লক্ষ্য করো



নকশাগুলির মধ্যে 4, 9 এবং 16 নম্বরটি ভালো করে দেখো। এদের যেভাবে সাজানো হয়েছে তার ফলে সারি ও স্তম্ভের সংখ্যা সমান। এছাড়াও এদের প্রতি সারিতে অবস্থিত মার্বেলের সংখ্যা ও প্রতি স্তম্ভে থাকা মার্বেলের সংখ্যা সমান। একইভাবে তোমরা 25 অথবা 36 টি মার্বেল নিয়েও এমন করে সাজিয়ে দেখতে পারো।

এমন করে সাজানো মোট মার্বেলের সংখ্যাগুলি এবার দেখে নেই—

$4 = 2 \times 2 = 2^2$ $\quad 9 = 3 \times 3 = 3^2$ $\quad 16 = 4 \times 4 = 4^2$ $\quad 25 = 5 \times 5 = 5^2$

কী দেখলে? 1, 4, 9 ইত্যাদি সংখ্যাগুলোকে আমরা কোনো একটি সংখ্যার বর্গ হিসেবে প্রকাশ করতে পারি। এই সংখ্যাগুলো হচ্ছে **বর্গ সংখ্যা**।

অর্থাৎ **যে সব সংখ্যাকে কোনো সংখ্যার বর্গ হিসেবে প্রকাশ করতে পারি সেই সংখ্যাগুলিকে বর্গ সংখ্যা (Square Numbers) বলা হয়।** ওপরে 1, 4, 9 এবং 16 নম্বরের সজানো মার্বেলগুলি বাদ দিলে বাকি সংখ্যাগুলোকে আমরা এভাবে সাজাতে পারি না। এই সব সংখ্যাগুলো বর্গ সংখ্যা নয়।

কার্য ঃ তোমরা 10 থেকে 100 মধ্যে থাকা বর্গ সংখ্যাগুলো খুঁজে বের করো—

একটি কৌশল দেখে নেই এসো

$1 \times 1 = 1^2 = 1$

$2 \times 2 = 2^2 = 4$

$3 \times 3 = 3^2 = 9$

$4 \times 4 = 4^2 = 16$ ইত্যাদি।

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... ইত্যাদি সংখ্যাগুলিকে **পূর্ণ বর্গ সংখ্যাও (Perfect Square Numbers)** বলা হয়।

যদি x একটি স্বাভাবিক সংখ্যা তবে $x \times x$ অর্থাৎ x^2 একটি বর্গ সংখ্যা। x যদি অখণ্ড সংখ্যা হয় তবুও এই কথাটি প্রযোজ্য হবে।

লক্ষ্য করো (Observe) ঃ $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\frac{1}{4}$ একটি বর্গ সংখ্যা। কিন্তু একটি পূর্ণ বর্গ নয়।

এই অধ্যায়ে বর্গ সম্পর্কে আলোচনা করার সময় আমরা মূলত পূর্ণ বর্গ সংখ্যার বিষয়েই আলোচনা করব। পূর্বে বর্গ সংখ্যার যে চিত্ররূপ দেওয়া হয়েছে যেসব পূর্ণ বর্গ সংখ্যার ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

তোমরা পাশের বর্গাকৃতির তালিকাটি খেয়াল করো। এটি সম্পূর্ণ করলে দেখতে পাবে যে পূর্ণ বর্গ সংখ্যাগুলো তালিকাটির কর্ণটিতে রয়েছে। এবার তোমরা 1 থেকে 1000 এর মধ্যে যেসব পূর্ণবর্গ সংখ্যা আছে সেগুলি বের করো। এই যে তোমরা পূর্ণ বর্গ সংখ্যাগুলো বের করলে। তার মধ্যে কোনো পূর্ণ বর্গ সংখ্যা থেকে গেল কি না দেখো তো। যেমন, 81 ও 100 -র মধ্যে কোনো পূর্ণ বর্গ সংখ্যা থাকতে পারে কি না দেখো।

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2		4								
3			9							
4				16						
5					25					
6						36				
7							49			
8								64		
9									81	
10										100

তোমরা দেখেছো যে $9 \times 9 = 9^2 = 81$ এবং $10 \times 10 = 10^2 = 100$ এবার 81 এবং 100 -এর মধ্যে অন্য কোনো পূর্ণ বর্গ সংখ্যা হতে হলে সেটা 9 এবং 10এর মধ্যে একটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ হতে হবে। কিন্তু 9 এবং 10 এর মধ্যে স্বাভাবিক সংখ্যা নেই। অতএব 81 এবং 100র মধ্যে কোনো পূর্ণবর্গ সংখ্যা নেই।

এবার অখণ্ড সংখ্যায় ক্ষেত্রে কী হয় দেখে নেই এসো। আমরা জানি 9 এবং 10 অখণ্ড সংখ্যা , ঠিক তেমনি– 9 এবং – 10 সংখ্যা দুটিও অখণ্ড সংখ্যা।

$$9^2 = 81, \qquad (-9)^2 = 81, \quad 10^2 = 100, \quad (-10)^2 = 100$$

এ ক্ষেত্রে তোমরা যেভাবে 9 এবং 10 এর মধ্যে কোনো অখণ্ড সংখ্যা খুঁজে পাবে না, তেমনি – 10 এবং – 9 এর মধ্যেও কোনো অখণ্ড সংখ্যা নেই।

তোমরা লক্ষ করবে যে আমরা যে কোনো সংখ্যাকেই বর্গ করতে পারি। একটি পরিমেয় সংখ্যা নাও। ধরো সংখ্যাটি $\frac{19}{2}(= 9.5)$ । এবার $9.5 \times 9.5 = (9.5)^2 = 90.25$।

অর্থাৎ 9.5 কে বর্গ করলে 90.25 পাই। মনে রাখবে যে 90.25 সংখ্যাটি একটি পরিমেয় সংখ্যার বর্গ, কিন্তু 90.25 পূর্ণ বর্গ সংখ্যা নয়। তোমরা এভাবে বিভিন্ন সংখ্যা নিয়ে সেসবের বর্গগুলি বের করে দেখতে পারো।

এবার, আমরা বর্গ সংখ্যার কতগুলি ধর্ম আলোচনা করব। এখানে বর্গ সংখ্যা মানে পূর্ণ বর্গ সংখ্যা।

তোমরা 1 এবং 1000 এর মধ্যে (এই দুটোকেও ধরে) যে পূর্ণ সংখ্যাগুলো বের করেছিলে, সেগুলি ভালো করে দেখো।

(i) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169 ইত্যাদি বর্গ সংখ্যাগুলো লক্ষ করো। সংখ্যাগুলোর এককের স্থানে কী কী অঙ্ক পাচ্ছো? একটি বর্গ সংখ্যার এককের স্থানে 0, 1, 4, 5, 6 এবং 9 এর যেকোনো একটি অঙ্ক থাকে। কিন্তু, বর্গ সংখ্যায় এককের স্থানে কখনো 2, 3, 7 বা 8 সংখ্যা থাকে না।

আবার, যদি কোনো একটি সংখ্যার এককের স্থানে 0, 1, 4, 5, 6 এবং 9 -এর যেকোনো একটি অঙ্ক থাকে তবে সংখ্যাটি বর্গ সংখ্যা হবে কি? উদাহরণস্বরূপ, 10, 11, 14 ইত্যাদির ক্ষেত্রে এককের স্থানে ক্রমে 0, 1, 4 রয়েছে। কিন্তু এগুলি বর্গ সংখ্যা নয়।

অতএব এককের স্থানে 0, 1, 4, 5, 6 এবং 9 থাকলেই যে সংখ্যাটি পূর্ণ বর্গ হবে তা নিশ্চিতভাবে বলা যাচ্ছে না। **আমরা কেবল মাত্র অনুমান করতে পারি। তবে এই অঙ্কগুলি বাদ দিয়ে এককের স্থানে ভিন্ন অঙ্ক, যেমন 2, 3, 7 বা 8 থাকলে, আমরা নিশ্চিত ভাবে বলতে পরেব যে সংখ্যাটি পূর্ণ বর্গ নয়।**

(ii) কতগুলি অযুগ্ম সংখ্যার বর্গ বের করে দেখি এসো

$1^2 = 1$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $17^2 = 289$, $97^2 = 9409$

বর্গগুলি খেয়াল করো। প্রতিটি বর্গই একটি অযুগ্ম সংখ্যা। তাই নয় কি? অতএব আমরা বলতে পারি যে **অযুগ্ম সংখ্যার (Odd Numbers) বর্গও একটি অযুগ্ম সংখ্যা।**

(iii) এবার কয়েকটি যুগ্ম সংখ্যার বর্গ বের করে দেখি এসো

$2^2 = 4$, $4^2 = 16$, $12^2 = 144$, $34^2 = 1156$, $96^2 = 9216$

বর্গগুলি লক্ষ করো। প্রত্যেকটি বর্গই একটি যুগ্ম সংখ্যা। তাই নয় কি? তোমরাও কয়েকটি যুগ্ম সংখ্যা নিয়ে সেটা বর্গ করে দেখো। বর্গগুলো এক-একটি যুগ্ম সংখ্যা নয় কি? অতএব আমরা বলতে পারি যে **যুগ্ম সংখ্যার (Even Numbers) বর্গও একটি যুগ্ম সংখ্যা।**

6.2 বর্গ সংখ্যা সম্পর্কীয় কয়েকটি আকর্ষণীয় নকশা (Some Interesting Patterns related to Square Numbers) :

6.2.1 নীচের ক্রমিক অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফলগুলো নেওয়া হল—

$1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ ইত্যাদি।

এখানে 4, 9, 16, ... প্রতিটিই এক একটি বর্গ সংখ্যা। এই ধারণাটিকে আমরা এভাগে লিখতে পারি।—

$1 = 1^2 = 1$

$1 + 3 = 4 = 2^2$ (প্রথম দুটি অযুগ্ম সংখ্যার যোগফল)

$1+3+5=9=3^2$ (প্রথম তিনটি অযুগ্ম সংখ্যার যোগফল)

$1+3+5+7=16=4^2$ (প্রথম চারটি অযুগ্ম সংখ্যার যোগফল)

একই ভাবে আমরা পাই —

$1+3+5+7+9=25=5^2$

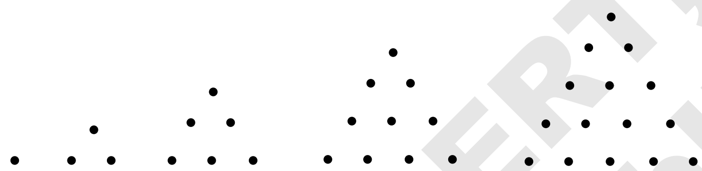
$1+3+5+7+9+11=36=6^2$

ওপরের সংখ্যা-নকশাটি লক্ষ করো। ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যার যোগফলের সঙ্গে বর্গ সংখ্যার একটি সম্পর্ক আছে।

সম্পর্কটি হচ্ছে, **প্রথম n টি ক্রমিক অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল n^2**

6.2.2 নীচের নকশাগুলো দেখো। এগুলি ত্রিভুজের আকারে দেখানো হয়েছে।

কোনো সংখ্যার সমসংখ্যক বিন্দু নিয়ে ত্রিভুজ আকারে সাজাতে পারলে সংখ্যাটিকে **ত্রিভুজীয় সংখ্যা (Triangular Numbers)** বলে। যেমন, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ... ইত্যাদি ত্রিভুজীয় সংখ্যা।



1 3 6 10 15 ইত্যাদি

(ত্রিভুজীয় সংখ্যার নমুনা)

জেনে রাখি

একটি স্বাভাবিক সংখ্যা n র জন্য $\frac{n(n+1)}{2}$ একটি ত্রিভুজীয় সংখ্যা। যেমন,

$n=1$ হলে ত্রিভুজীয় সংখ্যা হবে $\frac{1(1+1)}{2}=1$

$n=2$ হলে ত্রিভুজীয় সংখ্যা হবে $\frac{2(2+1)}{2}=3$

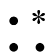
$n=3$ হলে ত্রিভুজীয় সংখ্যা হবে $\frac{3(3+1)}{2}=6$ ইত্যাদি

6.2.3 বর্গ সংখ্যার সঙ্গে ত্রিভুজীয় সংখ্যার সম্পর্ক (Relation between Square Numbers with Triangular Numbers) :

দুটি ক্রমিক ত্রিভুজীয় সংখ্যা যোগ করে দেখি এসো

$1+3=4=2^2$

বিন্দুর সাহায্যে দেখি এসো —



* (একটি) + • (তিনটি)

$=1+3=4$

$3 + 6 = 9 = 3^2$

$6 + 10 = 16 = 4^2$

$10 + 15 = 25 = 5^2$ ইত্যাদি।

```
• * *
• • *
• • •
```

* (তিনটি) + • (ছয়টি)
$= 3 + 6 = 9$

```
• * * *
• • * *
• • • *
• • • •
```

* (ছয়টি) + • (দহটি)
$= 6 + 10 = 16$

অতএব আমরা বলতে পারি যে **দুটি ক্রমিক ত্রিভুজীয় সংখ্যার যোগফল একটি বর্গ সংখ্যা।**

অনুশীলনী 6.1

1. 1 থেকে আরম্ভ করে 200 পর্যন্ত কতগুলি পূর্ণবর্গ সংখ্যা আছে।
2. নীচের সংখ্যাগুলি বর্গ করলে এককের স্থানে কী অঙ্ক থাকবে লেখো।
   (i) 51 (ii) 99 (iii) 205 (iv) 3400 (v) 1987
3. নীচের সংখ্যাগুলিকে পূর্ণ বর্গ না হওয়ার কারণ উল্লেখ করো।
   (i) 4347 (ii) 24832 (iii) 35493 (iv) 403388 (v) 182000
4. (i) 5 টি সংখ্যা লেখো যার বর্গ যুগ্ম।
   (ii) 5 টি সংখ্যা লেখো যার বর্গ অযুগ্ম।
5. সরাসরি যোগ না করে বিশেষ ধর্মের ভিত্তিতে যোগফল বের করো।
   (i) $1 + 3 + 5 + 7$
   (ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$
   (iii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25$
6. 36 কে 6 টি ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যার যোগফল হিসেবে পাওয়া যেতে পারে কি?
7. 15 থেকে বড় 5 টি ক্রমিক ত্রিভুজীয় সংখ্যা লেখো। সেই সংখ্যাগুলো থেকে ক্রমিক দুটো করে সংখ্যা নিয়ে তাদের যোগফলগুলি বর্গ সংখ্যা হয় কি না পরীক্ষা করো।

6.3 একটি সংখ্যার বর্গ নির্ণয় করার সহজ পদ্ধতি (An easy method to find the square of a number)

এককের ঘরে 5 থাকা সংখ্যার বর্গ নির্ণয়ের সহজ পদ্ধতি ঃ

15, 25, 35, 45, ... ইত্যাদি সংখ্যার বর্গ কীকরে সহজে বের করতে পারি দেখে নেই এসো—

তোমরা গতানুগতিক পদ্ধতিতে এদের বর্গ করলে পাবে যে

$15^2 = 225$ $25^2 = 625$ $35^2 = 1225$ $45^2 = 2025$

এবার এসব নীচের মতো করে সাজিয়ে দেখি

$15^2 = 225 = (1 \times 2)$ শতক $+ 25$, (1×2) শতক হল 2 শতক $= 200$

$25^2 = 625 = (2 \times 3)$ শতক $+ 25$, (2×3) শতক হল 6 শতক $= 600$

$35^2 = 1225 = (3 \times 4)$ শতক $+ 25$

$45^2 = 2025 = (4 \times 5)$ শতক $+ 25$

কথাটি এই ভাবে ভাবো

দশকের স্থানে 2 টিকে 1 বাড়িয়ে 3 করার পর অন্য 2 দিয়ে গুণ

$$\begin{array}{r|c|c|l} & 2 & 5 & \\ \times & 2 & 5 & \\ \hline \rightarrow & 6 & 25 & \leftarrow \end{array}$$

এককের স্থানে 5 দুটি গুণ

আবার দেখো —

দশকের স্থানে 6 টিকে 7 করে নিয়ে তাকে 6 দিয়ে গুণ

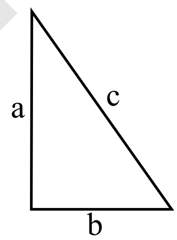
$$\begin{array}{r|c|c|l} & 6 & 5 & \\ & 6 & 5 & \\ \hline \rightarrow & 42 & 25 & \leftarrow \end{array}$$

এককের স্থানে 5 × 5

আরেকবার দেখো —

$$\begin{array}{rr|l} & 8 & 5 \\ \times & 8 & 5 \\ \hline 9 \times 8 \text{ করে} \rightarrow & 72 & 25 \quad \leftarrow 5 \times 5 \text{ করে} \end{array}$$

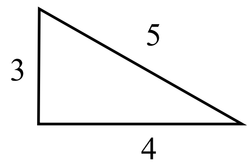
6.4 পাইথাগোরীয় ত্রিতয় (Pythagorean Triplets)



সমকোণী ত্রিভুজের একটি বিশেষ ধর্ম এরকম

'সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণের বর্গ অন্য দুটি বাহুর বর্গের সমষ্টির সমান।' অর্থাৎ পাশের সমকোণী ত্রিভুজটিতে $a^2 + b^2 = c^2$, যেখানে a, b ও c সমকোণী ত্রিভুজটির বাহুগুলোর মাপ বুঝিয়েছে।

এবার তোমরা একটি উদাহরণ নাও। যদি সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুটির দৈর্ঘ্য ক্রমে 4 একক এবং 3 একক হয় তবে কর্ণটির দৈর্ঘ্য কত হবে দেখো।



এখানে $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

আমরা জানি যে $5^2 = 25$, অতএব কর্ণটির দৈর্ঘ্য 5 একক।

অর্থাৎ আমরা পেলাম যে, $3^2 + 4^2 = 5^2$

এরকম তিনটি সংখ্যাকে পাইথাগোরীয় ত্রিতয় বলা হয়। অর্থাৎ 3, 4, 5 পাইথাগোরীয় ত্রিতয়।

তোমরা একটু চেষ্টা করলেই তিনটি সংখ্যা এরকম পাবে যে $a^2 + b^2 = c^2$ হচ্ছে (যেখানে a, b, c তিনটি স্বাভাবিক সংখ্যা)

তোমরা 6, 8 এবং 10 নিয়ে এগুলি পাইথাগোরীয় ত্রিতয় কি না দেখো।

যেহেতু $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$

অতএব 6, 8 এবং 10 পাইথাগোরীয় ত্রিতয়।

চেষ্টা করে দেখো

নীচের কোণগুলি পাইথাগোরীয় ত্রিতয়?

(i) 15, 20, 25 (ii) 7, 24, 25 (iii) 5, 10, 13

যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা p র জন্য (এখানে $p>1$) আমরা জানি যে

$(2p)^2 + (p^2 - 1)^2 = (p^2 + 1)^2$

তোমরা খেয়াল করেছ কি যে বামপক্ষটি দুটি বর্গের যোগফল ও ডানপক্ষটি একটি বর্গ, অর্থাৎ এর নকশা $a^2 + b^2 = c^2$ এর মতো হয়েছে। অর্থাৎ $2p$, $p^2 - 1$ এবং $p^2 + 1$ একটি পাইথাগোরীয় ত্রিতয় গঠন করে।

এসো, এবার আমরা p র কতগুলি মান নিয়ে পাইথাগোরীয় ত্রিতয় গঠন করি।

ধরো $p = 4$

অতএব $2p = 8$, $p^2 - 1 = 15$, $p^2 + 1 = 17$

একই ভাবে, $(2p)^2 + (p^2 - 1)^2$

$= 8^2 + 15^2$

$= 64 + 225$

$= 289$

$= 17^2$ $[\because 17 \times 17 = 289]$

অতএব $8^2 + 15^2 = 17^2$ এবং তাই 8, 15, 17 পাইথাগোরীয় ত্রিতয়।

একই ভাবে $(2p)^2 + (p^2 - 1)^2 = (p^2 + 1)^2$র সাহায্যে কতগুলি পাইথাগোরীয় ত্রিতয় পেতে পারি। যদিও কতগুলি পাইথাগোরীয় ত্রিতয়ের জন্য এই অভেদটি সত্য নয়। উদাহরণস্বরূপে 5, 12, 13 এই ত্রতয়টি এখানে খাটে না।

লক্ষ্য করবে যে p (যেখানে $p>1$) এর মান যতই বসাও না কেন, $2p$, $p^2 - 1$ এবং $p^2 + 1$ এর মধ্যে $2p$ সবচেয়ে ছোট এবং $p^2 + 1$ । অর্থাৎ $2p < p^2 - 1 < p^2 + 1$

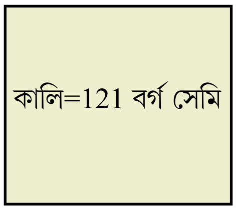
অনুশীলনী 6.2

1. নীচের সংখ্যাগুলোর বর্গ বের করো।
   (i) 35 (ii) 55 (iii) 95
2. তিনটি পাইথাগোরীয় ত্রিতয় উল্লেখ করো।
3. একটি পাইথাগোরীয় ত্রিতয় নির্ণয় করো যার সবচেয়ে ছোট পদটি 10

6.5 বর্গমূল (Square roots)

বর্গমূল কী সেটা একটি উদাহরণের সাহায্যে আলোচনা করব।

ধরা হল, একটি বর্গের কালি 121 বর্গ সেমি। এই তথ্যটি থেকে তুমি বর্গটির বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে বলতে পারবে কি?



তোমরা জান যে একটি বর্গের কালি = (বাহু)^2

অতএব আমাদের এমন একটা সংখ্যা দরকার যেটা বর্গ করলে 121 পাওয়া যায়। এখানে বাহুর যে দৈর্ঘ্য পাব সেটাই হবে 121 -এর বর্গমূল।

আমরা জানি যে $11^2 = 121$

অতএব ওপরের প্রশ্নটির উত্তর হবে— যে বর্গটির কালি 121 বর্গ সেমি, তার বাহুর দৈর্ঘ্য 11 সেমি।

এখানে 121 এর ক্ষেত্রে 11 হল বর্গমূল।

আমরা জানি যে

$1^2 = 1$ অতএব 1র বর্গমূল হল 1

$2^2 = 4$ অতএব 4র বর্গমূল হল 2

$3^2 = 9$ অতএব 9র বর্গমূল হল 3

$14^2 = 196$ অতএব 196র বর্গমূল হল 14

লক্ষ্য করো

$(-1)^2 = 1$ এবং $1^2 = 1$ অতএব আমরা বলতে পারি যে 1এর বর্গমূল 1 এবং -1

$(-2)^2 = 4$ এবং $2^2 = 4$ অতএব আমরা বলতে পারি যে 4 এর বর্গমূল 2 এবং -2

একটি পূর্ণ বর্গের দুটি বর্গমূল রয়েছে। এই পাঠটিতে, আমরা একটি সংখ্যার ধনাত্মক বর্গমূলটিই বিবেচনা করব। কোনো একটি সংখ্যার ধনাত্মক বর্গমূলকে '$\sqrt{\ }$' প্রতীকের সাহায্যে নির্দেশ করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{9} = 3$ (-3 নয়), $\sqrt{196} = 14$ (-14 নয়) ইত্যাদি।

উক্তি (Statement)	সিদ্ধান্ত (Conclusion)
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$

উক্তি (Statement)	সিদ্ধান্ত (Conclusion)
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$

6.6 কোনো সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়ের পদ্ধতি Method of finding Square Roots of a Number)

6.6.1 উৎপাদকের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় (Finding square roots by prime factorisation):

আমরা জানি যে $25 = 5 \times 5 = 5^2$

$\therefore \sqrt{25} = 5$

আবার, $169 = 13 \times 13 = 13^2$

$\therefore \sqrt{169} = 13$

অতএব দেখা গেল যে একটি বর্গ সংখ্যাকে যদি একই সমান দুটি উৎপাদকে ভেঙে নেওয়া হয়, তবে তার একটি উৎপাদক সেই সংখ্যাটির বর্গমূল হবে।

অন্য কয়েকটি উদাহরণ দেখে নেই চলো

(i) 225এর বর্গমূল —

225 কে মৌলিক উৎপাদকে ভেঙে নিলে পাব

$225 = \underline{3 \times 3} \times \underline{5 \times 5} = 3^2 \times 5^2 = (3 \times 5)^2$

$\therefore \sqrt{225} = 3 \times 5 = 15$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 225 \\ \hline 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

(ii) 900 এর বর্গমূল —

900 কে মৌলিক উৎপাদকে ভাঙলে আমরা পাই

$900 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{5 \times 5} = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

$= (2 \times 3 \times 5)^2$

$\therefore \quad \sqrt{900} = 2 \times 3 \times 5 = 30$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 900 \\ \hline 2 & 450 \\ \hline 3 & 225 \\ \hline 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

(iii) 7056র বর্গমূল —

7056 ক মৌলিক উৎপাদকে ভাঙলে পাব

$7056 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7} = 2^2 \times 2^2 \times 3^2 \times 7^2$

$= (2 \times 2 \times 3 \times 7)^2$

$\therefore \quad \sqrt{7056} = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

$= 84$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 7056 \\ \hline 2 & 3528 \\ \hline 2 & 1764 \\ \hline 2 & 882 \\ \hline 3 & 441 \\ \hline 3 & 147 \\ \hline 7 & 49 \\ \hline & 7 \end{array}$$

ওপরের উদাহরণগুলি থেকে কী শিখলে? সংখ্যাটি বড় হলে প্রথমে সেটাকে ছোট ছোট যে কোনো সংখ্যক উৎপাদকে ভেঙে নেওয়া যেতে পারে। তারপর সমান সমান উৎপাদকের প্রতিটি জোড়া থেকে একটি একটি উৎপাদক বেছে নিয়ে এক সঙ্গে পূরণ করলেই নির্ণেয় বর্গমূলটি পাওয়া যায়।

উৎপাদকে ভাঙতে অসুবিধা হলে মৌলিক উৎপাদকে ভেঙে নিলে সহজ হয়।

নিজে চেষ্টা করো নীচের সংখ্যাগুলোর বর্গমূল বের করো —

(i) 256 (ii) 2304 (iii) 74529

উদাহরণ ঃ একটি সংখ্যার বর্গ 5184 হলে সংখ্যাটি কী হবে?

সমাধান ঃ এখানে রয়েছে যে একটি বর্গ সংখ্যা করলে 5184 পাওয়া যায়। সেই সংখ্যাটি বের করতে হবে। অর্থাৎ 5184 এর বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে।

5184 কে মৌলিক উৎপাদকে ভেঙে নিলে আমরা পাই

$5184 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}$

$\therefore \quad \sqrt{5184} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$

বা $\quad 72^2 = 5184$

অতএব 72 কে বর্গ করলে 5184 পাওয়া যায়।

$$\begin{array}{r|l} 2 & 5184 \\ \hline 2 & 2592 \\ \hline 2 & 1296 \\ \hline 2 & 648 \\ \hline 2 & 324 \\ \hline 2 & 162 \\ \hline 3 & 81 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

উদাহৰণ ঃ 180 কে ক্ষুদ্ৰতম কোন সংখ্যা দ্বাৰা গুণ কৰলে গুণফলটি একটি পূৰ্ণবৰ্গ হবে? এভাবে যে সংখ্যাটি পাওয়া যাবে তাৰ বৰ্গমূল কত?

সমাধান ঃ $180 = 9 \times 4 \times 5 = 3^2 \times 2^2 \times 5$

এখানে ডানদিকে 5 একলা রয়েছে। অতএব এই 5 কে অন্য একটি 5 দিয়ে গুণ কৰলে সেটা জোড়া হবে। তাই দুই পক্ষেই 5 দিয়ে গুণ কৰা হল।

$\therefore \quad 180 \times 5 = 3^2 \times 2^2 \times 5 \times 5 = 3^2 \times 2^2 \times 5^2$

$\therefore \quad 180 \times 5$ অৰ্থাৎ 900 একটি পূৰ্ণ বৰ্গ সংখ্যা

$\therefore$ 180 কে 5 দিয়ে গুণ কৰলে একটি পূৰ্ণ বৰ্গ সংখ্যা পাওয়া যায় এবং সেই পূৰ্ণ বৰ্গ সংখ্যাটি 900।

এর বৰ্গমূল $3 \times 2 \times 5 = 30$

উদাহৰণ ঃ 2645 কে ক্ষুদ্ৰতম কোন সংখ্যা দিয়ে ভাগ কৰলে ভাগফলটি একটি পূৰ্ণবৰ্গ হবে? প্ৰাপ্ত সংখ্যাটির বৰ্গমূল কত?

সমাধান ঃ $2645 = 5 \times 23 \times 23$

এখানে দেখা গেছে যে ডান পাশে 5 সংখ্যাটি জোড় হিসেবে নেই। অতএব দুই পক্ষকে 5 দিয়ে ভাগ কৰলে পাই

$$(2645) \div 5 = (5 \times 23 \times 23) \div 5$$

অৰ্থাৎ $529 = 23 \times 23$

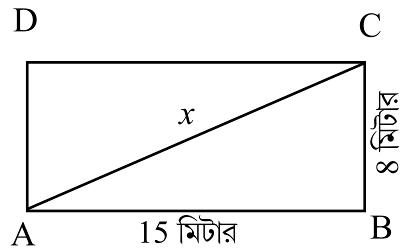
এবাৰ দেখা যাচ্ছে যে 2645 কে 5 দিয়ে ভাগ কৰলে একটি পূৰ্ণবৰ্গ সংখ্যা পাওয়া যায়। 529 এর বৰ্গমূল 23

উদাহৰণ ঃ একটি আয়তাকৃতির ছোট উদ্যানের দৈৰ্ঘ্য ও প্ৰস্থ ক্ৰমে 15 মিটার ও 8 মিটার। আয়তাকার সেই উদ্যানটির কৰ্ণের দৈৰ্ঘ্য কত?

সমাধান ঃ ধৰা হল ABCD উদ্যানটির কৰ্ণ AC এর দৈৰ্ঘ্য $= x$ মিটার

ছবিতে ABC একটি সমকোণী ত্ৰিভুজ।

এবাৰ পাইথাগোরীয় সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰে আমরা পাই



$AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা $x^2 = 15^2 + 8^2$

বা $x^2 = 225 + 64 = 289$

আমরা জানি যে $17^2 = 289$

এবং $(-17)^2 = 289$

কিন্তু দৈৰ্ঘ্য কখনো ঋণাত্মক হতে পাৰে না। অতএব 289 র বৰ্গমূল 17 নেব।

$\therefore \quad x = 17$

অতএব কৰ্ণটির দৈৰ্ঘ্য 17 মিটার।

উদাহৰণ ঃ 8, 12 এবং 18 দ্বাৰা ভাগ কৰা যায় এমন ক্ষুদ্ৰতম বৰ্গ সংখ্যাটি নিৰ্ণয় কৰো।

সমাধান ঃ লক্ষ্য কৰবে যে 8, 12 এবং 18 দ্বাৰা ভাগ কৰা যায় এমন সংখ্যাগুলোর ক্ষুদ্ৰতমটি বের কৰতে হবে এবং সেই সংখ্যাটি পূৰ্ণ বৰ্গও হতে হবে।

প্ৰথমে 8, 12, 18 এর ল.সা.গু. নিৰ্ণয় কৰব।

ল.সা.গু. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 8,\ 12,\ 18 \\ \hline 2 & 4,\ 6,\ 9 \\ \hline 3 & 2,\ 3,\ 9 \\ \hline & 2,\ 1,\ 3 \end{array}$$

এখানে 72 কে 8, 12 এবং 18 দিয়ে ভাগ করা যায় এবং এটা লঘিষ্ঠ, তবে এটা পূর্ণ বর্গ সংখ্যা নয়। 72 এর উৎপাদকগুলোর মধ্যে একটি 2 জোড়া অবস্থায় নেই। যদি একটি অতিরিক্ত 2 দিয়ে গুণ করা হয় তবে

$72 \times 2 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 2^2 \times 3^2 \times 2^2$ হয়।

অতএব ডানপক্ষ এবার জোড়ায় জোড়ায় আছে। তাই 72×2 অর্থাৎ 144 সংখ্যাটি পূর্ণ বর্গ। অতএব 8, 12 এবং 18 দিয়ে ভাগ করা যায় এমন ক্ষুদ্রতম বর্গ সংখ্যাটি হচ্ছে 144

উদাহরণ ঃ বর্গমূল নির্ণয় করো

(i) 2^8 (ii) 9×36

সমাধান ঃ

(i) আমরা জানি যে $2^8 = (2^4)^2$

$\therefore \sqrt{2^8} = 2^4$

(ii) আমরা জানি যে $9 \times 36 = 3^2 \times 6^2$

$\therefore \sqrt{9 \times 36} = 3 \times 6 = 18$

অনুশীলনী 6.3

1. সত্য না মিথ্যা বিচার করো—
   (i) একটি যুগ্ম পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল যুগ্ম।
   (ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$ র যোগফলটি একটি বর্গ সংখ্যা।
   (iii) একটি সংখ্যার এককের স্থানে 8 রয়েছে, ফলে সংখ্যাটি বর্গ সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা আছে।
   (iv) একটি বর্গ সংখ্যার এককের স্থানে 1 রয়েছে। অতএব এর বর্গমূলটির এককের স্থানে 1 বা 9 থাকার সম্ভাবনা রয়েছে।
2. নীচের প্রতিটি সংখ্যার বর্গমূলের 'একক' স্থানে সম্ভাব্য কী অঙ্ক থাকবে?
   (i) 8281 (ii) 5476 (iii) 172225 (iv) 12100
3. মৌলিক উৎপাদক বিশ্লেষণ পদ্ধতির দ্বারা নীচের সংখ্যাগুলোর বর্গমূল নির্ণয় করো
   (i) 256 (ii) 729 (iii) 1764 (iv) 5184
   (v) 7744 (vi) 5929 (vii) 8836 (viii) 4225
4. ক্ষুদ্রতম কোন সংখ্যা দিয়ে পূরণ করলে নীচের সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটি পূর্ণবর্গ হবে।
   (i) 15 (ii) 45 (iii) 150 (iv) 175
5. (i) 8, 15 এবং 20 দিয়ে ভাগ করা যায় এমন ক্ষুদ্রতম পূর্ণবর্গ সংখ্যাটি নির্ণয় করো।
   (ii) 12, 20 এবং 25 দিয়ে ভাগ করা যায় এমন ক্ষুদ্রতম পূর্ণবর্গ সংখ্যাটি নির্ণয় করো।
6. (i) 4032 কে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে ভাগফলটি একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে? সেই ভাগফলটির বর্গমূল বের করো।
   (ii) 14112 কে এমন কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে গুণফলটি পূর্ণবর্গ হবে। সেই গুণফলটির বর্গমূল কত?

7. একটি বিদ্যালয়ের মোট ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা 1024 জন। সকালের প্রার্থনায় তাদের এভাগে শারি পেতে দাঁড়াতে বলা হল যাতে শারির সংখ্যা ও প্রতিটি শারিতে থাকা ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা সমান হয়। শারীয় সংখ্যা ও প্রতিটি শারিতে থাকা ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা নির্ণয় করো।
8. একটি চা বাগানে চাড়া গাছের সারি ও প্রতিটি সারিতে থাকা চা-গাছের সংখ্যা সমান। বাগানটিতে 835 টি চাড়া আরও সরবরাহ করা হল। কিন্তু দেখা গেল যে ওপরের শর্তমতে চাড়া বুনতে হলে আরো কিছু চাড়ার দরকার। আরো কতগুলি চাড়া গাছের দরকার হবে বের করো।

6.6.2 ভাগ পদ্ধতিতে বর্গমূল নির্ণয় (Finding square root by division method) :

পদ্ধতিটির বর্ণনা করার আগে তোমরা নীচের ফলাফলগুলো লক্ষ করো

$4^2 = 16$	$10^2 = 100$	$32^2 = 1024$	$100^2 = 10000$	$388^2 = 150544$
$9^2 = 81$	$31^2 = 961$	$99^2 = 9801$	$103^2 = 10609$	$1234^2 = 1522756$

এরকম বিভিন্ন বর্গ করলে তোমরা দেখবে যে—

(i) যদি বর্গ সংখ্যাটিতে দুটি অঙ্ক থাকে, তবে তার বর্গমূলটিতে একটি অঙ্ক থাকবে।

(ii) যদি বর্গ সংখ্যাটিতে তিনটি বা চারটি অঙ্ক থাকে, তবে তার বর্গমূলটিতে দুটি অঙ্ক থাকবে।

(iii) যদি বর্গ সংখ্যাটিতে পাঁচটি বা ছয়টি অঙ্ক থাকে, তবে তার বর্গমূলটিতে তিনটি অঙ্ক থাকবে।

এই কথাটুকু নিশ্চয় তোমরা পর্যবেক্ষণ করে বুঝেছ। এবার আমরা ভাগ পদ্ধতির দ্বারা কীভাবে বর্গমূল বের করা যায় সেটা আলোচনা করব।

ভাগ পদ্ধতির দ্বারা বর্গমূল নির্ণয়ের নিয়ম (Rule of finding square root by division method)ঃ

স্তর 1 ঃ বর্গমূল বের করতে চলা সংখ্যাটির এককের স্থান থেকে অঙ্কগুলো দুই ভাগে থুপ করে ওপরে একটি দাগ দিয়ে নাও। সংখ্যাটির একেবারে শেষে (বাঁ হাতে) অবস্থিত অঙ্কটি যদি একলা অর্থাৎ একমাত্র থাকে তবুও সেটার ওপর দাগ দিয়ে নাও।

স্তর 2 ঃ এমন একটি বৃহত্তম সংখ্যা বাছতে হয় যার বর্গফল বাম হাতের প্রথম থুপটির (অঙ্কটির) সমান বা নিকটবর্তী ছোট সংখ্যাটি হয়। এই সংখ্যাটি ভাজক ও ভাগফল দুটোই হবে।

স্তর 3 ঃ প্রথম থুপ থেকে ভাজক ও ভাগফলের গুণফলটি বিয়োগ করে ভাগশেষ নির্ণয় করো এবং সঙ্গে সঙ্গে পেছনের থুপটি নীচে নামিয়ে এনে ভাগশেষের ডানদিকে লেখো। এই সংখ্যাটিই হবে নতুন ভাজ্য।

স্তর 4 ঃ এবার নতুন ভাজকটি পেতে ভাগফলটিকে দ্বিগুণ করো এবং তার ডানদিকে একটি খালি জায়গা রেখে দাও। এই শূন্য স্থানটি গুণ করতে সম্ভাব্য সবচেয়ে বড় অঙ্কটি নাও— যেটা ভাগফলটিতে নতুন অঙ্ক হবে। দেখবে যাতে, ভাজকটিকে ভাগফলের নতুন অঙ্ক দিয়ে গুণ করলে গুণফলটি ভাজ্য থেকে ছোট বা সমান হয়।

স্তর 5 ঃ সবগুলো থুপ শেষ না হওয়া পর্যন্ত পর্যায় ক্রমে 2, 3, 4 এগিয়ে থাকতে হবে। ভাগশেষ শূন্য হলে ভাগফলটিই নির্ণেয় বর্গমূল হবে এবং যদি ভাগশেষ শূন্য না হয় তবে সংখ্যাটি পূর্ণ বর্গ সংখ্যা নয়।

একটি উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টা বোঝার চেষ্টা করব।

উদাহরণ ঃ 74529 এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ প্রথম স্তরে 74529 সংখ্যাটির এককের স্থান থেকে অঙ্কগুলি দুটো দুটো করে থুপ বানিয়ে ওপরে একটি দাগ দিয়ে নিতে হবে। ফলে এখানে তিনটি থুপ পাব। সেটা হল $\overline{7}\ \overline{45}\ \overline{29}$ ।

দ্বিতীয় স্তরে আমাদের এমন একটি বৃহত্তম সংখ্যা বাছতে হবে যার বর্গফল প্রথম থুপটির অর্থাৎ 7 এর সমান বা নিকটবর্তী ছোট সংখ্যা হবে। এমন সংখ্যা হচ্ছে 2। অর্থাৎ

ভাজ্য = 7

ভাজক = 2

ভাগফল = 2

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{7}\,\overline{45}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline & 3 \end{array}$$

এখন ভাজক ও ভাগফলের গুণফল 4 কে 7 থেকে বিয়োগ করলে 3 পাব।

এবার দ্বিতীয় থুপটিকে নীচে নামিয়ে এনে ভাগশেষের ডানদিকে লেখা হল। এভাগে আমরা পেলাম 345 অতএব এবার ভাজ্য = 345

এখন নতুন ভাজকটি পাওয়ার জন্য ভাগফল 2 কে দ্বিগুণ করা হল এবং ডানদিকে একটি খালি স্থান রেখে দেওয়া হল।

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{7}\,\overline{45}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline 4\_ & 345 \end{array}$$

এবার আমরা 4 এর ডানদিকের খালি জায়গায় এমন একটি সংখ্যা বসাব যাতে এই সংখ্যাটি দিয়ে 4 কে গুণ করলে 345 থেকে ছোট নিকটবর্তী সংখ্যা বা সমান সংখ্যা পেতে পারি। এসো আমরা সেই ধরনের একটি সংখ্যা খুঁজে বের করার চেষ্টা করি—

$$\begin{aligned} 41 \times 1 &= 41 \\ 42 \times 2 &= 84 \\ 43 \times 3 &= 129 \\ 44 \times 4 &= 176 \\ 45 \times 5 &= 225 \\ 46 \times 6 &= 276 \\ 47 \times 7 &= 329 \\ 48 \times 8 &= 384 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2\ \ 7 \\ \hline 2 & \overline{7}\,\overline{45}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline 4\underline{7} & 345 \\ & -329 \\ \hline & \ \ 16 \end{array}$$

দেখা গেল যে শূন্য স্থানে 7 বসালে 345 এর নিকটবর্তী ছোট সংখ্যা 329 পাই।

এবার বিয়োগ করার ফলে 16 পাওয়া গেল।

একইভাবে এবার 29 নেমে আসবে। নতুন ভাজ্যটি হবে 1629।

এবার 2 × 27=54 লেখা হল। এখন ঠিক আগের মতো করে আমাদের 54 এর ডানদিকের শূন্য জায়গায় এমন একটি সংখ্যা বসাতে হবে যাতে সেই সংখ্যাটি দিয়ে 54 কে গুণ করলে 1629 থেকে নিকটবর্তী ছোট বা সমান সংখ্যা পাই।

$$\begin{array}{r|l} & 2\ \ 7 \\ \hline 2 & \overline{7}\,\overline{45}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline 4\underline{7} & 345 \\ & -329 \\ \hline 54\_ & \ \ 1629 \end{array}$$

একইভাবে এগিয়ে গিয়ে আমরা 54 এর ডানদিকের শূন্য স্থানে 3 বসালে $543 \times 3 = 1629$ পাব।

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;2\;\;7\;\;3 \\
\hline
2 & \overline{7}\;\overline{45}\;\overline{29} \\
 & -4 \\
\hline
47 & \;\;345 \\
 & -329 \\
\hline
543 & \;\;\;1629 \\
 & \;-1629 \\
\hline
 & \;\;\;\;\;\;\;0
\end{array}
$$

দেখা যাচ্ছে যে ভাগশেষ = 0

$\therefore$ 74529 এর বর্গমূল 273

উদাহরণ ঃ বর্গমূল নির্ণয় করো — (i) 961 (ii) 8649 (iii) 416200801

সমাধান ঃ (i)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3\;\;\;1 \\
\hline
3 & \overline{9}\;\;\overline{61} \\
 & 9 \\
\hline
61 & \;\;\;61 \\
 & \;\;\;61 \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore \sqrt{961} = 31$

(ii)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 9\;\;\;3 \\
\hline
9 & \overline{86}\;\overline{49} \\
 & 81 \\
\hline
183 & \;\;5\,49 \\
 & \;\;5\,49 \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore \sqrt{8649} = 93$

(iii)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2\;\;0\;\;4\;\;0\;\;1 \\
\hline
2 & \overline{4}\;\overline{16}\;\overline{20}\;\overline{08}\;\overline{01} \\
 & 4 \\
\hline
40 & \;\;16 \\
 & \;\;00 \\
\hline
404 & \;\;16\,20 \\
 & \;\;16\,16 \\
\hline
4080 & \;\;\;\;4\,08 \\
 & \;\;\;\;0\,00 \\
\hline
40801 & \;\;\;4\,08\,01 \\
 & \;\;\;4\,08\,01 \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore \sqrt{416200801} = 20401$

6.6.3 দশমিক সংখ্যার বর্গমূল (Square Roots of Decimal Numbers) :

স্তর 1 ঃ দশমিক বিন্দু থাকা সংখ্যাগুলির দুটি অংশ থাকে— অখণ্ড অংশ এবং ভগ্নাংশ। অখণ্ড অংশকে ঠিক আগের মতোই একক স্থান থেকে দুটি থুপ করে একটি দাগ দিয়ে নাও। সংখ্যাটিতে এককের শেষে অবস্থিত অঙ্কটি একলা থাকলে সেটার ওপরেও দাগ দিয়ে নাও।

স্তর 2 ঃ দশমিকের ডানপাশের অংশ অর্থাৎ ভগ্নাংশটিতে দশমিকের ডানদিকের দশমাংশের স্থান থেকে শুরু করে দুটো করে থুপ বানিয়ে একটি দাগ দিয়ে নাও। শেষের অঙ্কটি একলা থেকে গেলে শেষে একটি শূন্য বসিয়ে নিতে পার। (কেন? চিন্তা করো)

লক্ষ করো যে দশমিক বিন্দুর দুই দিকে অবস্থিত সংখ্যাগুলির ওপর দাগ কেটে সংখ্যার জোট করার দিক পৃথক পৃথক।

স্তর 3 ঃ এবার বর্গমূল বের করার জন্য পূর্বে উল্লিখিত ভাগ পদ্ধতির মাধ্যমে এগিয়ে যাও। জোট অংশের বর্গমূল বের করার সঙ্গে সঙ্গে দশমিক বিন্দু (.) বসাবে।

স্তর 4 ঃ এভাবে এগিয়ে গিয়ে ভাগশেষ শূন্য (0) পেলে ভাগফলটি হবে নির্ণেয় বর্গমূল।

উদাহরণ দিয়ে বোঝানোর চেষ্টা করি এসো।

উদাহরণ ঃ বর্গমূল নির্ণয় করো

(i) 1.69 (ii) 151.29 (iii) 990.3609 (iv) 0.0018931201

সমাধান ঃ

(i)

$$\begin{array}{r|l} & 1.\ 3 \\ \hline 1 & \overline{1}.\overline{69} \\ & 1 \\ \hline 23 & \ \ 69 \\ & \ \ 69 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore \sqrt{1.69} = 1.3$

(ii)

$$\begin{array}{r|l} & 1\ 2.\ 3 \\ \hline 1 & \overline{1}\,\overline{51}.\overline{29} \\ & 1 \\ \hline 22 & \ \ 51 \\ & \ \ 44 \\ \hline 243 & \ \ \ \ 729 \\ & \ \ \ \ 729 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore \sqrt{151.29} = 12.3$

(iii)

$$\begin{array}{r|l} & 3\ 1.\ 4\ 7 \\ \hline 3 & \overline{9}\,\overline{90}.\overline{36}\,\overline{09} \\ & 9 \\ \hline 61 & \ \ 90 \\ & \ \ 61 \\ \hline 624 & \ \ 29\ 36 \\ & \ \ 24\ 96 \\ \hline 6287 & \ \ \ \ 4\ 40\ 09 \\ & \ \ \ \ 4\ 40\ 09 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore \sqrt{990.3609} = 31.47$

(iv)

$$\begin{array}{r|l} & 0.\ 0\ 4\ 3\ 5\ 1 \\ \hline 4 & 0.\overline{00}\,\overline{18}\,\overline{93}\,\overline{12}\,\overline{01} \\ & \ \ \ \ 16 \\ \hline 83 & \ \ \ \ \ \ 293 \\ & \ \ \ \ \ \ 249 \\ \hline 865 & \ \ \ \ \ \ \ \ 44\ 12 \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ 43\ 25 \\ \hline 8701 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 87\ 01 \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 87\ 01 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore \sqrt{0.0018931201} = 0.04351$

অনুশীলনী 6.4

1. বর্গমূল নির্ণয় ছাড়াই নীচের সংখ্যাগুলোর বর্গমূলে কয়টি অঙ্ক থাকবে নির্ণয় করো—

   (i) 100 (ii) 21904 (iii) 17850625

2. ভাগ পদ্ধতির মাধ্যমে নীচের প্রতিটি সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করো।

   (i) 676 (ii) 841 (iii) 1156
   (iv) 2025 (v) 2704 (vi) 4489
   (vii) 8100 (viii) 14641 (ix) 15129 (x) 21904

3. নীচের দশমিক সংখ্যাগুলোর বর্গমূল বের করো।

   (i) 51.84 (ii) 79.21 (iii) 98.01
   (iv) 1.44 (v) 6.25 (vi) 973.44

4. একটি আয়তাকৃতির মাঠের দৈর্ঘ্য 35 মিটার ও প্রস্থ 12 মিটার। এর কর্ণের দৈর্ঘ্য কত হবে?

5. একটি বিদ্যালয়ে 1089 জন ছাত্র-ছাত্রী আছে। বিদ্যালয়ের বার্ষিক খেলা ধুলা প্রতিযোগিতার প্রথম দিন পতাকা উত্তোলনের সময় তাদের এমন ভাবে দাঁড়াতে বলা হল যে, সারির সংখ্যা যত হবে সারিতে থাকা ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যাও ততই হবে (অর্থাৎ সারি ও স্তম্ভের সংখ্যা সমান। এবার তাহলে ছাত্র-ছাত্রীদের দিয়ে কতগুলি সারি বানানো নাবে।

6. একটি পূর্ণবর্গ পেতে হলে নীচের প্রতিটি সংখ্যার সঙ্গে এমন কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি যোগ করতে হবে বের করো।

   (i) 1220 (ii) 1750 (iii) 5451 (iv) 1015

7. একটি পূর্ণ বর্গ সংখ্যা পাওয়ার জন্য নীচের প্রতিটি সংখ্যা থেকে বিয়োগ করতে হবে এমন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা কী কী নির্ণয় করো।

   (i) 825 (ii) 1450 (iii) 3250 (iv) 6262

8. 4612 র সবচেয়ে কাছের পূর্ণ বর্গ সংখ্যাটি কী?

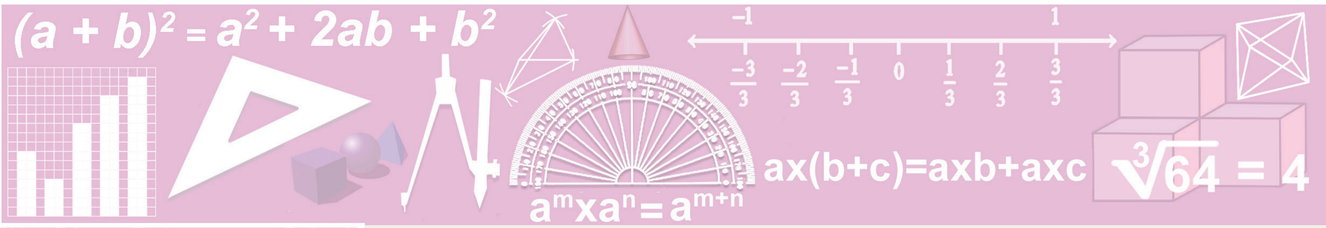
9. নীচের প্রত্যেকটির 5 টি করে উদাহরণ দাও—

   (i) বর্গ সংখ্যা যার এককের ঘরে 4 রয়েছে।
   (ii) বর্গ সংখ্যা যার এককের ঘরে 9 রয়েছে।
   (iii) বর্গ সংখ্যা যার এককের ঘরে 0 রয়েছে।

আমরা কী শিখলাম ?

1. যেসব সংখ্যাকে কোনো সংখ্যার বর্গ হিসেবে প্রকাশ করতে পারি সেই সব সংখ্যাগুলোকে বর্গ সংখ্যা বলে।
2. সকল বর্গ সংখ্যার এককের স্থানে 0, 1, 4, 5, 6 বা 9 থাকবে।
3. একটি সংখ্যার একক স্থানে 2, 3, 7 বা 8 থাকলে আমরা দৃঢ়তার সঙ্গে বলতে পারব যে সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়।
4. যুগ্ম সংখ্যার বর্গও যুগ্ম সংখ্যা এবং অযুগ্ম সংখ্যার বর্গও অযুগ্ম সংখ্যা।
5. বর্গের বিপরীত প্রক্রিয়া হচ্ছে বর্গমূল।
6. যদি বর্গ সংখ্যাটিতে একটি বা দুটি অঙ্ক থাকে তবে তার বর্গমূলে একটি অঙ্ক থাকবে। একই ভাবে যদি বর্গ সংখ্যাটিতে তিনটি বা চারটি অঙ্ক থাকে তবে তার বর্গমূলে দুটি অঙ্ক থাকবে ইত্যাদি।

❑❑❑



অধ্যায়-7

ঘন ও ঘনমূল
(Cube and Cube Roots)

U4T1P2

7.1 ঘন সংখ্যা (Cube Numbers)

1, 8, 27, 64, 125 ...... এই সংখ্যাগুলো লক্ষ্য করো —

$$1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$$
$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$
$$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$$
$$64 = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$$
$$125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$$

তিনটি একই সংখ্যা গুণ করে পাওয়া গুণফলটি হচ্ছে সেই সংখ্যাটির ঘন।

1, 8, 27, 64, 125 প্রত্যেকেই একেকটি ঘন সংখ্যা বা পূর্ণ ঘন।

এখানে 1 কে 1 -এর ঘন সংখ্যা
8 কে 2 -এর ঘন সংখ্যা
27 কে 3 -এর ঘন সংখ্যা
64 কে 4 -এর ঘন সংখ্যা
125 কে 5 -এর ঘন সংখ্যা বলে

1 থেকে 1000 পর্যন্ত কতগুলো ঘনসংখ্যা আছে বলতে পার কি?

নীচের সংখ্যা-তালিকাটি সম্পূর্ণ করলে বিষয়টা স্পষ্ট হবে।

সংখ্যা	ঘন	ঘন সংখ্যা
1	1^3	1
2	2^3	8
3	3^3	27
4	4^3	64
5	5^3	125
6	6^3	—
7	7^3	—
8	8^3	—
9	9^3	—
10	10^3	—

এই তালিকাটি মনে রাখলে পরবর্তী কালে গণনার ক্ষেত্রে অনেক সুবিধা হবে।

শূন্যস্থানগুলো পূর্ণ করো। দেখলে যে 1 থেকে 1000 পর্যন্ত মাত্র 10 টি ঘন সংখ্যা রয়েছে।

ঘন সংখ্যার সঙ্গে পরিচিত হই এসো —

50 একটি ঘন সংখ্যা হবে কি?

$50 = 2 \times 5 \times 5$ এখানে একই সংখ্যা তিনবার উৎপাদক হিসেবে নেই, তাই এটা ঘন সংখ্যা নয়।

কোনো একটি সংখ্যা ঘন সংখ্যা কি না সেটা পরীক্ষা করতে সংখ্যাটির মৌলিক উৎপাদক নির্ণয় করতে হবে। যদি একই মৌলিক উৎপাদকগুলো তিনটে করে একসঙ্গে গুণফল হিসেবে সাজাতে পারি তবে সেই সংখ্যাটিকে **ঘন সংখ্যা (Cube Numbers)** বলা হয়। যেমন, 1728 কে মৌলিক উৎপাদক হিসেবে বিশ্লেষণ করলে পাব—

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1728 \\ \hline 2 & 864 \\ \hline 2 & 432 \\ \hline 2 & 216 \\ \hline 2 & 108 \\ \hline 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1728 &= \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \\ &= 2^3 \times 2^3 \times 3^3 \\ &= (2 \times 2 \times 3)^3 \\ &= 12^3 \end{aligned}$$

অর্থাৎ $1728 = 12 \times 12 \times 12$

অতএব দেখলে যে তিনটি 12 গুণ করলে 1728 পাওয়া যায়। অর্থাৎ 1728 একটি ঘন সংখ্যা। 1728 কে 12 র ঘন বলা হয়।

7.2 বর্গ ও ঘন সংখ্যা (Square and Cube Numbers)

উদাহরণ 1 ঃ 100 একটি ঘন সংখ্যা কি না পরীক্ষা করে দেখো

$100 = 10 \times 10$

$$\begin{aligned} 100 &= 10 \times 10 \\ &= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \\ &= 2 \times 2 \times 5 \times 5 \end{aligned}$$

এখানে 100 র সবগুলো উৎপাদক মৌলিক। কিন্তু উৎপাদকগুলো তিনটি একই সংখ্যার গুণফল নয়।

2 এবং 5 দুটো করে আছে।

তাই 100 ঘন সংখ্যা নয়।

কিন্তু $100 = 10 \times 10$। তাই সংখ্যাটি বর্গ সংখ্যা।

কতগুলো বর্গ সংখ্যা আবার ঘন সংখ্যাও হতে পারে। যেমন 64 সংখ্যাটি ঘন সংখ্যা। কারণ

$64 = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$। অন্যদিকে $64 = 8 \times 8 = 8^2$।

ফলে 64 সংখ্যাটি ঘন সংখ্যা ও বর্গ সংখ্যা দুটোই।

সংখ্যা	বর্গ	বর্গসংখ্যা	ঘন	ঘনসংখ্যা
1	1^2	1	1^3	1
2	2^2	4	2^3	8
3	3^2	9	3^3	27
4	4^2	16	4^3	64
5	5^2	25	5^3	125
6	6^2	36	6^3	216
7	7^2	49	7^3	343
8	8^2	64	8^3	512
9	9^2	81	9^3	729
10	10^2	100	10^3	1000
11	11^2	121	11^3	1331
12	12^2	144	12^3	1728
13	13^2	169	13^3	2197
14	14^2	196	14^3	2744
15	15^2	225	15^3	3375
16	16^2	256	16^3	4096
17	17^2	289	17^3	4913
18	18^2	324	18^3	5832
19	19^2	361	19^3	6859
20	20^2	400	20^3	8000

পাশের তালিকাটি লক্ষ্য করো ঃ

1. **কতগুলো ঘনসংখ্যাকে বর্গ সংখ্যা হিসেবেও পাওয়া যায়,** যেমন— 1, 64, 4096 ইত্যাদি।

$$64^2 = 8^2 = 4^3$$

লক্ষ করো, $4096 = 64^2 = 16^3$

2. **যুগ্ম সংখ্যার ঘনফল যুগ্ম।**

যেমন— 2-এর ঘনফল 8, 4-এর ঘনফল 64, 6-এর ঘনফল 216, 18-এর ঘনফল 5832 ইত্যাদি

3. **অযুগ্ম সংখ্যাগুলোর ঘনফল অযুগ্ম।**

যেমন — 3-এর ঘনফল 27, 5-এর ঘনফল 125, 7এর ঘনফল 343, 9এর ঘনফল 729, 11এর ঘনফল 1331 ইত্যাদি।

4. **এবার নীচের সংখ্যাগুলো ভালো করে দেখো –**

$$2^3 = 8$$
$$12^3 = 1728$$
$$22^3 = 10648$$

সংখ্যাগুলোর এককের ঘরের অঙ্কটি 2, ঘনফলটির এককের ঘরের 8 কি না? তাই যেসব সংখ্যার এককের স্থানে 2 *থাকে সেসবের ঘনফলগুলোতে এককের স্থানে 8 পাওয়া যায়।*

এবার আমরা দেখব যে সংখ্যার এককের স্থানে 8 থাকলে তাদের ঘনফলের এককের স্থানে কী পাওয়া যায়।

$$8^3 = 512$$
$$18^3 = 5832$$
$$28^3 = 21952$$

কী দেখলে? ঘনফলগুলোর এককের স্থানে 2 রয়েছে। অতএব যেসব সংখ্যার এককের স্থানে 8 *থাকে তাদের ঘনফলগুলোতে এককের স্থানে 2 পাওয়া যায়। অতএব এটা মনে রাখার জন্য* $2 \rightleftarrows 8$ ব্যবহার করা যেতে পারে।

একইভাবে আমরা পরীক্ষা করে দেখতে পারি যে

$$1 \rightleftarrows 1,\quad 3 \rightleftarrows 7,\quad 4 \rightleftarrows 4,\quad 5 \rightleftarrows 5,\quad 6 \rightleftarrows 6,\quad 9 \rightleftarrows 9$$

এই সম্বন্ধগুলো ভালো করে মনে রাখলে সংখ্যার ঘন বের করতে বা ঘন সংখ্যাকে শনাক্ত করতে বা ঘন সংখ্যার ঘনমূল বের করতে সুবিধা হবে।

7.3 কতগুলো মজার নকশা (Some Interesting Patterns)

i) ঘন সংখ্যা ও বর্গ সংখ্যার সম্পর্ক (Relation between Cube Numbers and Square Numbers)

$$1^3 = 1 = 1^2$$
$$1^3 + 2^3 = (1+2)^2 = 3^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2 = 6^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1+2+3+4)^2 = 10^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1+2+3+4+5)^2 = 15^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = (1+2+3+4+5+6)^2 = 21^2$$

(বাকি অংশ নিজে করো)

ii) ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যার যোগ
(Sum of Consecutive Odd Numbers)

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 = 1^3\\
3+5 &= 8 = 2^3\\
7+9+11 &= 27 = 3^3\\
13+15+17+19 &= 64 = 4^3\\
21+23+25+27+29 &= 125 = 5^3\\
31+33+35+37+39+41 &= 216 = 6^3
\end{aligned}
$$

....

(বাকি অংশ নিজে করো)

কার্য ঃ নীচের তালিকাটি নিজে সম্পূর্ণ করো।

+	1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3	10^3	11^3	12^3
1^3												1729
2^3												
3^3												
4^3												
5^3												
6^3												
7^3												
8^3												
9^3										1729		
10^3									1729			
11^3												
	1729											

তালিকাটি থেকে

$$1729 = 12^3 + 1^3$$
$$1729 = 10^3 + 9^3$$

তালিকাটি আরো বড় করে 16^3 পর্যন্ত বা 24^3 পর্যন্ত বসালে দেখবে যে

$$16^3 + 2^3 = 15^3 + 9^3 = 4104$$
$$24^3 + 2^3 = 20^3 + 18^3 \qquad \text{ইত্যাদি।}$$

একজন বিশ্ববিখ্যাত গণিতজ্ঞ হচ্ছেন ভারতের রামানুজন। তাঁর সম্পূর্ণ নাম শ্রীনিবাস আয়েংগার রামানুজন। উনিশ শতকের এই মহান গণিতজ্ঞকে বিশ্বের সবাই সংখ্যার বন্ধু হিসেবে জানেন। তিনি আজীবন সংখ্যার ওপর বিভিন্ন পরীক্ষা নিরীক্ষা করেছেন।

তিনি একবার রোগাক্রান্ত হয়ে লন্ডনের একটি নার্সিং হোমে শয্যাশায়ী ছিলেন। তাঁর অন্যতম বন্ধু ব্রিটিশ গণিতজ্ঞ অধ্যাপক হার্ডি তাঁর খবর নিতে আসেন। দুজনেই গণিতজ্ঞ। তাই গণিত নিয়ে চর্চা হওয়াটাই খুব স্বাভাবিক। হার্ডি একবার জিজ্ঞাসা করলেন— বন্ধু, আমি যে ট্যাক্সিচেপে এলাম সেটার নম্বর 1729 – সংখ্যাটির কোনো বিশেষত্ব আছে কি?' এটা শুনে অসুস্থ রামানুজনের চোখ দুটো উজ্জ্বল হয়ে উঠল। তিনি উত্তর দিলেন— 'বন্ধু, এই সংখ্যাটি খুব মজার সংখ্যা। এটি হচ্ছে এমন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যাকে দুটি ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যার ঘনফলের সমষ্টিরূপে দুই ভিন্ন উপায়ে প্রকাশ করা যায়।

$$\text{অর্থাৎ} \quad 1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$$

1729 কে রামানুজন সংখ্যা (Ramanujan Numbers) বলা হয়।

গণিত, বিশেষ করে সংখ্যাতত্ত্বের প্রতি তাঁর অনবদ্য অবদানের জন্য 22 ডিচেম্বর তাঁর জন্মদিনটিকে গোটা ভারতবর্ষে '**গণিত দিবস**' হিসেবে পালন করা হয়।

উদাহরণ 2 ঃ 243 একটি পূর্ণ ঘন অথবা ঘন সংখ্যা হবে কি? যদি না হয়, একটি পূর্ণঘন পাওয়ার জন্য 243 কে সবচেয়ে ছোট কোন স্বাভাবিক সংখ্যার দ্বারা পূরণ করতে হবে বের করো।

সমাধান ঃ তোমরা ইতিপূর্বে পেয়েছ যে একটি পূর্ণঘন সংখ্যা কোনো একটি সংখ্যার তিনবারের গুণফল বা তিনটির দল বা থুপ হিসেবে লিখতে পারি। যেমন— $8 = 2 \times 2 \times 2$

$$27 = 3 \times 3 \times 3$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 243 \\ \hline 3 & 81 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

অতএব একটি সংখ্যা পূর্ণঘন কি না পরীক্ষা করার জন্য সংখ্যাটির মৌলিক উৎপাদকগুলো তিনটে তিনটে থুপ করে সাজাতে হবে

$243 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times 3 \times 3$

মৌলিক উৎপাদক 3 এর একটি ত্রিভাগ (বা 3টির থুপ) গঠন হওয়ার পর 3×3 থেকে যায়। তাই 243 টি পূর্ণ ঘন বা ঘন সংখ্যা নয়।

মনে রাখবে যদি কোনো একটি সংখ্যার মৌলিক উৎপাদক বিশ্লেষণে প্রতিটি উৎপাদক তিনবার তিনবার করে আসে তবে সংখ্যাটি পূর্ণঘন হবে। অতএব 243কে পূর্ণঘন করতে হলে আমাদের 3 দিয়ে পূরণ করতে হবে।

উদাহরণ 3 ঃ 2187 সংখ্যাটি পূর্ণঘন বা ঘন সংখ্যা হবে কি? যদি না হয় তবে পূর্ণঘন পেতে হলে 2178 কে সবচেয়ে ছোট এমন কী স্বাভাবিক সংখ্যার দ্বারা ভাগ করলে ভাগফলটি একটি পূর্ণঘন হবে?

সমাধান ঃ 2187 কে মৌলিক উৎপাদক বিশ্লেষণ করলে পাই—

$2187 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 3$

3	2187
3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
	3

লক্ষ করেছো কি? এখানে দুটো থুপ হওয়ার পর একটি 3 থেকে গেছে।

অতএব 2187 একটি পূর্ণঘন বা ঘনসংখ্যা নয়।

একে পূর্ণঘন বা ঘনসংখ্যা করতে গেলে 3 দ্বারা ভাগ করতে হবে।

অতএব, 2187কে 3 দ্বারা ভাগ করলে আমরা একটি পূর্ণঘন সংখ্যা পাব।

উদাহরণ 4 ঃ 35000 এটা পূর্ণঘন হতে হলে সবচেয়ে ছোট কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করতে হবে নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ

$$\begin{aligned} 35000 &= 35 \times 1000 \\ &= 5 \times 7 \times 10 \times 10 \times 10 \\ &= 5 \times 7 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \\ &= 5 \times 7 \times 2^3 \times 5^3 \end{aligned}$$

এখানে 5 এবং 7 একলা রয়ে গেল, ফলে 35000 কে $5 \times 7 = 35$ দ্বারা ভাগ করলে পূর্ণঘন সংখ্যা পাওয়া যাবে।

অনুশীলনী 7.1

1. নীচের কোনগুলো পূর্ণঘন সংখ্যা নির্ণয় করো।
   (a) 500 (b) 1331 (c) 2025
   (d) 6859 (e) 2376 (f) 8000
2. একটি ঘন সংখ্যা পেতে হলে সবচেয়ে ছোট কোন সংখ্যা দ্বারা নীচের সংখ্যাগুলোকে গুণ করতে হবে?
   (a) 675 (b) 256 (c) 100 (d) 72
3. একটি ঘন সংখ্যা পাওয়ার জন্য সবচেয়ে ছোট কোন সংখ্যার দ্বারা নীচের সংখ্যাগুলোকে ভাগ করতে হবে?
   (a) 2401 (b) 8192 (c) 6561 (d) 100,000
4. সবচেয়ে ছোট কোন সংখ্যা দ্বারা নীচের সংখ্যাগুলোকে গুণ কিংবা ভাগ করলে একটি ঘন সংখ্যা পাব?
   (a) 250 (b) 675 (c) 1372 (d) 3000 (e) 153664

7.4 ঘনমূল (Cube Roots)

একটি ঘন সংখ্যা 64 নেওয়া যাক। তোমরা জান যে $64 = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$। 4-এর ঘনফল 64। আমরা এভাবেও বলতে পারি যে 64 এর ঘনমূল 4।

মৌলিক উৎপাদক বিশ্লেষণ পদ্ধতির দ্বারা আমরা বলতে পারি—

$$\begin{aligned} 64 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= 2^3 \times 2^3 \\ &= (2 \times 2)^3 \\ &= 4^3 \end{aligned}$$

তোমরা পেয়েছে যে
$a^m \times b^m = (a \times b)^m$

ওপরের উদাহরণটি আমরা প্রতীকের দ্বারা এভাবেও লিখতে পারি—

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

কোনো একটি সংখ্যার ঘনমূল $\sqrt[3]{\ }$ প্রতীকের দ্বারা বোঝানো হয়।

নীচের তালিকাটি লক্ষ করো

$1^3 = 1$ অতএব $\sqrt[3]{1} = 1$
$2^3 = 8$ অতএব $\sqrt[3]{8} = 2$
$3^3 = 27$ অতএব $\sqrt[3]{27} = 3$
$4^3 = 64$ অতএব $\sqrt[3]{64} = 4$

1000-এর ঘনমূল পর্যন্ত নিজে লিখে সম্পূর্ণ করো।

7.4.1 মৌলিক উৎপাদক পদ্ধতির ঘনমূল নির্ণয় (Finding Cube Root using Prime Factorisation method)ঃ

13824 সংখ্যাটি বেছে নাও। এর ঘনমূল বের করার জন্য প্রথমে 13824-এর মৌলিক উৎপাদক বিশ্লেষণ করো।

$$\begin{aligned} &13824 \\ &= \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \\ &= 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 3^3 \\ &= (2 \times 2 \times 2 \times 3)^3 \\ &= 24^3 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt[3]{13842} = 24$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 13824 \\ \hline 2 & 6912 \\ \hline 2 & 3456 \\ \hline 2 & 1728 \\ \hline 2 & 864 \\ \hline 2 & 432 \\ \hline 2 & 216 \\ \hline 2 & 108 \\ \hline 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

উদাহরণ 5 ঃ 15625 -এর ঘনমূল নির্ণয় করো ঃ

সমাধান ঃ

$$\begin{aligned} &15625 \\ &= \underline{5 \times 5 \times 5} \times \underline{5 \times 5 \times 5} \\ &= 5^3 \times 5^3 \\ &= (5 \times 5)^3 \\ &= 25^3 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt[3]{15625} = 25$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 15625 \\ \hline 5 & 3125 \\ \hline 5 & 625 \\ \hline 5 & 125 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

নিজে চেষ্টা করো ঃ

মৌলিক উৎপাদক বিশ্লেষণ পদ্ধতির দ্বারা ঘনমূল নির্ণয় করো

(a) 512 (b) 27000 (c) 110592 (d) 46656 (e) 175616

7.4.2 ঘন সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয়ের আনুমানিক পদ্ধতি (Determination of cube root of cube numbers by the method of assumption)

কখনো কখনো অনুমান করেও একটি ঘন সংখ্যার ঘনমূল বের করা যায়।

ধাপ 1 ঃ ঘনমূল বের করতে চলা সংখ্যাটির একক স্থান থেকে অঙ্কগুলো তিনটে তিনটে করে থুপ বানিয়ে উপরে একটি দাগ দিয়ে নাও। সংখ্যাটির একেবারে শেষে (বাঁ হাতে) একটি বা দুটি অঙ্ক থাকলে সেটার উপরেও দাগ দিয়ে নাও।

ধাপ 2 ঃ এবার ডানদিকের থুপের শেষ অঙ্কটি খেয়াল করো। তোমরা এর আগে ঘন বের করার ক্ষেত্রে যে নিয়মটা পেয়েছ (যেমন $2 \rightleftarrows 8$, $1 \rightleftarrows 1$ ইত্যাদি) সেটা ঘনমূল বের করার ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য হবে। এই নিয়মগুলো ব্যবহার করে ঘনমূলটি লেখো।

ধাপ 3 ঃ অন্য থুপগুলোর ক্ষেত্রেও একইভাবে এগিয়ে যাও।

ধাপ 4 ঃ একলা থেকে যাওয়া একটি বা দুটি সংখ্যার থুপটির দিকে লক্ষ করো। এবার এমন একটি ঘনসংখ্যা বেছে বের করো যেটা এই সংখ্যাটি অথবা সংখ্যা দুটির থুপের চেয়ে ছোট ও খুব কাছের হয়। এই ঘন সংখ্যাটির ঘনমূলটিই হচ্ছে থুপটির ঘনমূল।

এভাবে সংখ্যাগুলো থুপ থুপ করে ভাগ করে প্রত্যেকটি থুপের ঘনমূল বের করে আমরা সংখ্যাটির আনুমানিক ঘনমূল বের করতে পারি। **একটি কথা মনে রাখবে যে এই পদ্ধতির দ্বারা আমরা ঘনমূল সম্পর্কে কেবল অনুমান করতে পারি। ঘনমূল বের করার সময় আমরা মূলত মৌলিক উৎপাদক বিশ্লেষণ পদ্ধতির দ্বারাই এগোব।**

একটি উদাহরণের দ্বারা বিষয়টি বোঝার চেষ্টা করি এসো।

একটি সংখ্যা 2744-এর ঘনমূল বের করতে হবে।

প্রথমে, সংখ্যাটির ডানদিক থেকে তিনটি অঙ্কের এক একটি থুপ বানাও। যেমন — $\overline{2}\ \ \overline{744}$

ডানদিকের প্রথম থুপে তিনটি অঙ্ক রয়েছে। কিন্তু বাঁ দিকে কেবল একটি অঙ্ক আছে। প্রথম থুপের শেষের অঙ্কটি হচ্ছে 4। অতএব $4 \rightleftarrows 4$ নিয়ম অনুসারে ঘনমূলটিও 4 দিয়েই শেষ হবে।

এবার দ্বিতীয় থুপের 2-এর দিকে লক্ষ করো। অর্থাৎ $1^3 \neq 2 \neq 2^3$ বা $1 \neq 2 \neq 8$।

$\therefore$ 2 থেকে ছোট ঘন সংখ্যা 1 থাকবে $\overline{2}\ \ \overline{744}$ -এর ঘনমূলের দশকের স্থানে অর্থাৎ ঘনমূলের দ্বিতীয় স্থানে থাকবে। নির্ণেয় ঘনমূলটি হবে 14

উদাহরণ 6 ঃ 12167এর ঘনমূল নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $\overline{12}\,\overline{167}$

167 এর ঘনমূল $7 \rightleftarrows 3$ নিয়ম অনুসারে 3 হবে।

12 থেকে ছোট ও খুব কাছের ঘন সংখ্যা হচ্ছে 8। 8 -এর ঘনমূল 2। অতএব 12167 -এর আনুমানিক ঘনমূল হবে 23।

অবশ্য $23^3 = 12167$। অতএব এই ক্ষেত্রে 12167 -এর ঘনমূল 23।

নিজে চেষ্টা করো ঃ

আনুমানিক পদ্ধতির দ্বারা ঘনমূল বের করো।

(a) 4096 (b) 9261 (c) 13824 (d) 15625

অনুশীলনী 7.2

1. নীচের প্রশ্নগুলোর শুদ্ধ উত্তরটি লেখো

(i) 23 -এর ঘনর একক স্থানটি হবে

(a) 3 (b) 6 (c) 7 (d) 9

(ii) নীচের কোন সংখ্যাটি পূর্ণঘন?

(a) 243 (b) 216 (c) 392 (d) 8640

(iii) নীচের কোন সংখ্যাটি পূর্ণঘন নয়?

(a) 216 (b) 567 (c) 125 (d) 343

(iv) $\sqrt[3]{1000}$ -এর মান

(a) 1 (b) 10 (c) 100 (d) 1000

(v) $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{125}$ -এর মান

(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13

2. মৌলিক উৎপাদক বিশ্লেষণ পদ্ধতির দ্বারা নীচের সংখ্যাগুলোর ঘনমূল বের করো—

(i) 125 (ii) 343 (iii) 2744 (iv) 10648 (v) 4096

(vi) 35937 (vii) 216000 (viii) 9261 (ix) 21952 (x) 6859

আমরা কী কী শিখলাম

1. তিনটি একই সংখ্যাকে গুণ করে যে গুণফলটি পাওয়া যায় তাকে সেই সংখ্যাটির ঘন সংখ্যা বলে।
2. যুগ্ম সংখ্যার ঘনফল যুগ্ম সংখ্যা এবং অযুগ্ম সংখ্যার ঘনফল অযুগ্ম সংখ্যা।
3. কোনো একটি সংখ্যার এককের ঘরে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 এবং 0 সংখ্যা থাকলে তার ঘনফলের এককের ঘরে ক্রমে 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9 ও 0 থাকবে।
4. উৎপাদক বিশ্লেষণ পদ্ধতি ব্যবহার করে আমরা ঘনমূল বের করতে পারি।

❑❑❑

অধ্যায়-8

পরিমাণের তুলনা
(Comparing Quatities)

X3Y8V1

যষ্ঠ ও সপ্তম শ্রেণিতে অনুপাতের ধারণা দ্বারা কীভাবে বিভিন্ন পরিমাণ সূচক রাশির তুলনা করা যায় সে বিষয়ে তোমরা কিছু আভাস পেয়েছ। তোমরা হয়ত খেয়াল করেছ যে অনুপাতের সাহায্যে যে কোনো দুটি পরিমাণের তুলনা সম্ভব হলেও, ব্যবহারের সচলতা এবং সর্বজনীয় করার জন্য যে কোনো অনুপাতকে 100 পূরণ করে শতাংশতে রূপান্তরিত করা হয়। অতএব যে কোনো পরিমাণের তুলনায় শতাংশের ব্যবহার অপরিহার্য। ইতিমধ্যে শতাংশর প্রয়োগের দ্বারা সামগ্রীর বেচা-কেনা, পরিমাণের হ্রাস-বৃদ্ধি, লাভ-লোকসান, সরল সুদ নির্ণয় ইত্যাদির বিষয়ে কিছু প্রাথমিক আভাস পেয়ে এসেছ। এই আলোচনাতে উক্ত বিষয়সমূহের সঙ্গে শতকরা রেহাই ছাড়াও ব্যয়, চক্রবৃদ্ধি সুদ এবং কর প্রণালী সম্পর্কে ধারণা দেওয়ার চেষ্টা করা হয়েছে।

8.1 লাভ-লোকসান (Profit & Loss) ঃ তোমরা ইতিমধ্যে সপ্তম শ্রেণিতে লাভ-লোকসানের বিষয়ে শিখেছ। এসো, তোমাদের শেখা সূত্রগুলো আরেকবার মনে করিয়ে দিই।

লাভ বা লোকসান সবসময় কেনাদামের ওপর নির্ভর করে। যদি বিক্রির দাম > কেনা দাম হয় তাহলে বিক্রেতার লাভ হয়। অন্যদিকে যদি বিক্রির দাম < কেনা দাম হয় তাহলে বিক্রেতার লোকসান হয়।

লাভ = বিক্রির দাম (SP) – কেনা দাম (CP) এখানে SP > CP

লোকসান = কেনা দাম (CP) – বেচা দাম (SP), এখানে CP > SP

8.1.1 শতকরা হিসেবে লাভ বা লোকসান (Profit or Loss as a Percentage)

$$\text{লাভের শতাংশ } (p\%) = \frac{\text{লাভ}}{\text{কেনা দাম}} \times 100\% = \frac{\text{বিক্রির দাম} - \text{কেনা দাম}}{\text{কেনা দাম}} \times 100\% \text{ বা } \frac{\text{SP}-\text{CP}}{\text{CP}} \times 100\%$$

$$\text{লোকসানের শতাংশ } (l\%) = \frac{\text{লোকসান}}{\text{কেনাদাম}} \times 100\% = \frac{\text{কেনা দাম} - \text{বেচা দাম}}{\text{কেনা দাম}} \times 100\% \text{ বা } \frac{\text{CP}-\text{SP}}{\text{CP}} \times 100\%$$

যদি কেনা দাম এবং শতকরা লাভ ($p\%$) দেওয়া থাকে তাহলে বেচা দাম বের করতে আমরা নীচে উল্লেখ করার মত এগিয়ে যাব।

আমরা জানি যে

$$\text{লাভের শতাংশ} = \frac{\text{লাভ}}{\text{কেনা দাম}} \times 100\%$$

$$\text{অথবা} \quad p = \frac{\text{SP}-\text{CP}}{\text{CP}} \times 100$$

$$\text{অথবা} \quad SP - CP = p \times \frac{CP}{100}$$

$$\text{অথবা} \quad SP = CP + \frac{p}{100} \times CP$$

$$= \left(1 + \frac{p}{100}\right) \times CP$$

$$\therefore SP = \left(\frac{100+p}{100}\right) \times CP$$

$$\text{বা বেচা দাম} = \left(\frac{100 + \text{লাভের শতাংশ}}{100}\right) \times \text{কেনা দাম}$$

ওপরের সূত্রটির থেকে আমরা কেনা দাম বার করতে পারি। তোমরা চেষ্টা করে দেখো তো—

$$\text{কেনা দাম} = \left(\frac{100}{100 + \text{লাভের শতাংশ}}\right) \times \text{বেচা দাম}$$

$$CP = \left(\frac{100}{100+p}\right) \times SP$$

ঠিক তেমনি, যদি কেনা দাম এবং শতকরা লোকসান দেওয়া থাকে, তবে বেচার দাম কীভাবে বার করব? আমরা জানি যে

$$\text{লোকসানের শতাংশ} = \frac{\text{লোকসান}}{\text{কেনা দাম}} \times 100\%$$

$$\text{বা} \quad l = \frac{CP - SP}{CP} \times 100$$

$$\text{বা} \quad CP - SP = \frac{l}{100} \times CP$$

$$\text{বা} \quad SP = CP - \frac{l}{100} \times CP$$

$$= \left(1 - \frac{l}{100}\right) \times CP \qquad \text{বা} \left(\frac{100-l}{100}\right) \times CP$$

$$\text{ঠিক তেমনি} \quad CP = \left(\frac{100}{100-l}\right) \times SP$$

অতএব

$$\text{বিক্রির দাম} = \left(\frac{100 - \text{লোকসানের শতাংশ}}{100}\right) \times \text{কেনা দাম}$$

$$SP = \frac{100 - l}{100} \times CP$$

$$\text{কেনা দাম} = \left(\frac{100}{100 - \text{লোকসানের শতাংশ}}\right) \times \text{বিক্রির দাম}$$

$$CP = \left(\frac{100}{100 - l}\right) \times SP$$

একটি কৌশল দেখি এসো ঃ

$$\text{বেচা দাম (SP)} = \left(\frac{100 \pm x}{100}\right) \times CP$$

লাভের জন্য $+x$ এবং লোকসানের জন্য $-x$ ব্যবহার করো।

এখন আমরা লাভ-লোকসানের ওপর কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করি এসো—

উদাহরণ 1 ঃ একটি ঘড়ি 250 টাকায় কিনে একজন দোকানদার 190 টাকায় বিক্রি করলে তার লাভ বা লোকসান কত হল এবং শতাংশ হিসেবে কত শতাংশ লাভ বা লোকসান হল?

সমাধান ঃ এখানে কেনা দাম (CP) = 250 টাকা

বেচা দাম (SP) = 190 টাকা

যেহেতু CP > SP

$\therefore$ দোকানদারের লোকসান হল।

লোকসান = CP – SP

= (250 – 190) টাকা

= 60 টাকা

$$\text{শতকরা লোকসান} = \frac{\text{লোকসান}}{\text{কেনা দাম}} \times 100\%$$

$$= \frac{60}{250} \times 100\%$$

$$= 24\%$$

উদাহরণ 2 ঃ এটা বলের দাম 150 টাকা। যদি দোকানদার 10% লোকসানে বিক্রি করেন তাহলে বলটি কত টাকায় বিক্রি করলেন?

সমাধান ঃ কেনা দাম CP = 150 টাকা

লোকসানের শতাংশ $l\% = 10\%$ বা $l = 10$

$\therefore$ বিক্রির দাম (SP) $= \dfrac{100-l}{100} \times \text{CP}$

$= \dfrac{100-10}{100} \times 150$

$= \dfrac{90}{100} \times 150$

$\therefore$ বলটি বেচা দাম $= 135$ টাকা

উদাহরণ 3 ঃ একটি পুতুলের বিক্রিমূল্য 540 টাকা। যদি দোকানদার 20% লাভে বিক্রি করে তবে পুতুলটির কেনা দাম নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ এখানে বিক্রি দাম (SP) $= 540$ টাকা

লাভের শতাংশ $(p\%) = 20\%$ বা $P = 20$

$\therefore$ কেনা দাম $= \dfrac{100}{100+p} \times \text{SP}$

$= \dfrac{100}{100+20} \times 540$

$= \dfrac{100}{120} \times 540$

$\therefore$ পুতুলটির কেনা দাম $= 450$ টাকা

উদাহরণ 4 ঃ এখানে ঘড়ি 10% লোকসান করে 450 টাকায় বিক্রি করা হল। ঘড়িটির কেনা দাম কত?

সমাধান ঃ এখানে ঘড়িটির বেচা দাম SP $= 450$ টাকা

শতাংশ লোকসান $l\% = 10\%$ বা $l = 10$

$\therefore$ এখানে কেনা দাম (CP) $= \dfrac{100}{100-l} \times \text{SP}$

$= \dfrac{100}{100-10} \times 450$

$\therefore$ ঘড়িটির কেনা দাম $= 500$ টাকা।

উদাহরণ 5 ঃ একটি বল 10% লোকসান করে বিক্রি করা হল। যদি বলটি আরও 117 টাকা বেশি দামে বিক্রি করা হত, তাহলে দোকানদারের 3% লাভ হতে পারত। বলটি কত টাকায় বিক্রি করা হয়েছিল?

সমাধান ঃ ধরা হল কেনা দাম CP $= x$ টাকা

যদি 10% লোকসান হয় SP $= \dfrac{100-10}{100} \times \text{CP}$ $\quad (l\% = 10\%$ বা $l = 10)$

বা $\quad \text{SP} = \dfrac{9}{10}x \quad \text{.....(i)}$

যদি 3% লাভ হয় SP $= \frac{100+3}{100}$

$= \frac{103}{100} x$

প্রশ্নমতে, $\frac{9}{10}x + 117 = \frac{103}{100} x$

বা, $\frac{103}{100}x - \frac{9}{10}x = 117$

বা, $\frac{103x - 90x}{100} = 117$

বা, $13x = 117 \times 100$

বা, $x = \frac{117 \times 100}{13}$

$= 900$

$\therefore$ বলটির কেনা দাম $= 900$ টকা

বলটির বিক্রি দাম $= \frac{9}{10} \times 900$ টাকা

$= 810$ টাকা [(i) র থেকে]

উদাহরণ 6 ঃ যদি 8 টি কলমের বিক্রির দাম এবং আরো 10 টি কলমের কেনা দাম সমান হয় তাহলে শতকরা লাভ বা লোকসান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ ধরা হল একটি কলমের কেনা দাম $= x$ টাকা

$\therefore$ 10 টা কলমের কেনা দাম $= 10x$ টাকা

বা 8 টা কলমের বিক্রির দাম $= 10x$ টাকা

বা 1 কলমের বিক্রির দাম $= \frac{10x}{8}$ টাকা

যেহেতু $\frac{10x}{8} > x$, অতএব, বিক্রির দাম > কেনা দাম

$\therefore$ লেনদেনে লাভ হবে

$\therefore$ লাভ $= \frac{10x}{8} - x = \frac{10x - 8x}{8} = \frac{2x}{8} = \frac{x}{4}$

$$\therefore \quad \text{শতকরা লাভ} = \frac{\text{একটি কলমে লাভ হয়েছে}}{\text{একটি কলমের কেনা দাম}} \times 100\%$$

$$= \frac{\frac{x}{4}}{x} \times 100\%$$

$$= \frac{x}{4} \times \frac{1}{x} \times 100\%$$

$$= 25\%$$

অথবা,

প্রশ্নানুযায়ী,

8 টি কলমের বিক্রির দাম = 10 টি কলমের কেনা দাম

বা $8 \times SP = 10 \times CP$

বা $\frac{SP}{CP} = \frac{10}{8}$

বা $SP = \frac{10}{8} \times CP$

$$\therefore \quad \text{শতকরা লাভ} = \frac{\text{লাভ}}{\text{কেনা দাম}} \times 100\%$$

$$= \frac{SP - CP}{100} \times 100\%$$

$$= \frac{\frac{10}{8}CP - CP}{CP} \times 100\%$$

$$= \frac{\frac{2}{8}CP}{CP} \times 100\%$$

$$= \frac{2}{8} \times 100\%$$

$$= 25\%$$

$\therefore$ শতকরা লাভ = 25%

অনুশীলনী 8.1

1. একটি ঘড়ি 250 টাকায় কিনে 260 টাকায় বিক্রি করা হল। কত লাভ হল এবং শতকরা লাভ কত হল?
2. একটি কলম 60 টাকায় কিনে কত টাকায় বিক্রি করলে 15% লাভ হবে।

3. রমেন একটি মোবাইল 13,500 টাকায় বিক্রি করল। বিক্রি করতে তার 20% লোকসান হল। মোবাইলটি কত দামে কিনেছিল?
4. যদি 10 টি কলমের বিক্রির দাম 8 টা কলমের কেনা দামের সমান হয়, তাহলে শতকরা লাভ বা লোকসান নির্ণয় করো।
5. 5000 টাকায় কেনা একটি সাইকেল 12% লাভ নিয়ে বিক্রি করা হল। সাইকেলটির বিক্রির দাম বের করো।
6. কমল একটি জলের ফিল্টার 4500 টাকায় কিনে 4230 টাকায় বিক্রি করল। তাঁর শতকরা লোকসান কত হল?
7. একজন দোকানদার একটি ঘড়ি 785 টাকায় বিক্রি করায় 5% লোকসান হল। ঘড়িটির কেনা দাম নির্ণয় করো।
8. যদি 10 টি বস্তুর বিক্রির দাম 11 টা একই জিনিসের কেনা দামের সমান হয় তাহলে শতকরা লাভ বা লোকসান নির্ণয় করো।
9. একজন ব্যক্তি দুটি গাড়ির প্রত্যেকটি 99000 টাকার কিনলেন। তার মধ্যে একটি বিক্রি করে তিনি মোট 10% লাভ করলেন এবং অন্যটি বিক্রি করে 10% লোকসান হল। তাঁর এই ক্রয়-বিক্রয়ে মোট শতকরা কত টাকা বা লোকসান হল?

8.2 রেহাই বা বাট্টা (Discount)

তোমরা বাজারে গিয়ে নিশ্চয়ই খেয়াল করেছ যে কিছু কিছু দোকানে 50% রেহাই লেখা থাকে (50% Discount) বা 30% রেহাই বা 20% রেহাই ইত্যাদি। সেই দোকানগুলো থেকে কম মূল্যে সামগ্রীটি কিনতে পাওয়া যায়।

কোনো একটি বস্তুর বা জিনিসের ওপর ছাপা বা তালিকায় উল্লেখ থাকা মূল্যকে সেই জিনিসের ছাপমূল্য (Marked Price) বা প্রকৃত মূল্য বলা হয়। জিনিসের প্রকৃত মূল্য বা ছাপা মূল্যতে (Discounted Price) বেচা-কেনা করা বলে। প্রকৃত মূল্য থেকে যতটুকু মূল্য হ্রাস করা হয় সেই পরিমাণকে বাট্টা বা রেহাই (Discount) বলে।

অর্থাৎ ছাপামূল্য – বিক্রিমূল্য = রেহাই

বা **রেহাই = ছাপামূল্য – বিক্রিমূল্য (Discount= Market Price - Selling Price)**

রেহাই সবসময় ছাপামূল্যের উপর নির্ধারণ করা হয়।

এখানে আমরা কেবল এক ধরনের রেহাইর কথাই উল্লেখ করেছি। তা হল খুচরা রেহাই (Retail Discount)। ব্যবসায় অনুসারে সাধারণত রেহাইকে তিনটি শ্রেণিতে ভাগ করতে পারি। যেমন—

(a) খুচরা রেহাই (Retail Discount)

(b) নগদ রেহাই (Cash Discount)

এবং (c) বাণিজ্য রেহাই (Trade Discount)

নগদ রেহাই ও বাণিজ্য রেহাইর বিষয়ে তোমরা পরে শিখতে পারবে। এখানে আমরা খুচরা রেহাইর বিষয়েই আলোচনা করব—

উদাহরণ 7 ঃ একটি বস্তুর ছাপামূল্য 1600 টাকা। পূজা উপলক্ষে দোকানদার বস্তুটির মূল্য 10% রেহাই দিলেন। কত দামে বস্তুটি বিক্রি করবে?

সমাধান ঃ ছাপামূল্য = 1600 টাকা

রেহাই = ছাপামূল্যের 10%

= 1600 টাকার 10%

$= 10 \times \frac{1}{100} \times 1600$

= 160 টাকা

∴ নির্ণেয় বিক্রি মূল্য = ছাপামূল্য – রেহাই

= (1600 – 160) টাকা

= 1440 টাকা

উদাহৰণ 8 ঃ একজন দোকানার 235 টাকার একটি শাড়ি 24% খুচরা বাট্টা (বা রেহাই মূল্যতে) বিক্রি করতে চাইলে শাড়িটির বিক্রি মূল্য কত হবে?

সমাধান ঃ শাড়িটির ছাপামূল্য = 235 টাকা

শাড়িটিতে রেহাই = প্রকৃত মূল্যের 24%

= 235 টাকার 24%

$= 235 \times 24 \times \frac{1}{100}$

= 65.40 টাকা

∴ শাড়িটির বিক্রির দাম = প্রকৃত মূল্য – রেহাই

= (235.00 – 56.40) টাকা

= 178.60 টাকা

উদাহরণ 9 ঃ একটি জামার ছাপামূল্য 500 টাকা। দোকানদার 20% রেহাই দিয়েছেন এবং বড়দিন উপলক্ষে 10% অতিরিক্ত রেহাই দিলেন। জামাটির বিক্রির দাম নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ জামাটির ছাপামূল্য = 500 টকা

প্রথম রেহাই = ছাপামূল্যের 20%

= 500 টাকার 20%

$= 500 \times 20 \times \frac{1}{100}$

= 100 টাকা

∴ 20% রেহাই দিলে জামাটির বিক্রিমূল্য

= ছাপামূল্য – রেহাই

= (500 – 100) টাকা

= 400 টাকা

অতিরিক্ত রেহাই = 20% রেহাই দেওয়া বিক্রিমূল্যর 10%

$= 400$ টাকা 10%

$= 400 \times 10 \times \frac{1}{100}$

$= 40$ টকা

$\therefore$ নির্ণেয় বিক্রি মূল্য $= (400 - 40)$ টাকা

$= 360$ টাকা

মনে রাখতে হবে (Note) ঃ

ক্রমিক শতকরা রেহাই (Successive Discount) সবসময় প্রত্যেক রেহাইর পাওয়া বিক্রিমূল্যের ওপর নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ 10 ঃ একজন জুতার দোকানদার পুরনো একজোড়া জুতা 480 টাকার বিক্রি করল। জুতাজোড়ার ছাপা দাম 600 টাকা হলে গ্রাহক কত হারে রেহাই পেল নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ জুতাজোড়ার ছাপামূল্য $= 600$ টাকা

বিক্রিমূল্য $= 480$ টাকা

$\therefore$ রেহাই = ছাপামূল্য – বিক্রিমূল্য

$= (600 - 480)$ টাকা

$= 120$ টাকা

600 টাকা ছাপামূল্য হলে রেহাই হয় 120 টাকা

$\therefore$ 1 টাকা ছাপামূল্য হলে রেহাই হবে $\frac{120}{600}$ টাকা

$\therefore$ 100 টাকা ছাপামূল্য হলে রেহাই হব $\frac{120}{600} \times 100$ টাকা $= 20$ টাকা

$\therefore$ শতকরা রেহাই $= 20\%$

লক্ষ্য করো (Observe)ঃ

শতকরা রেহাই **(Discount Percent)** $= \dfrac{\text{রেহাই}}{\text{ছাপামূল্য}} \times 100\%$

$= \dfrac{MP - SP}{MP} \times 100\%$

টীকা ঃ আমরা এই সূত্রটি ব্যবহার করেও শতকরা রেহাই বের করতে পারি।

উদাহরণ 11 ঃ উৎসব উপলক্ষে একটি শাড়িতে 35% রেহাই দেওয়ার ফলে দোকানদার 3000 টাকায় শাড়িটি বিক্রি করল। শাড়িটির ছাপামূল্য কত ছিল?

সমাধান ঃ ধরা হল, শাড়িটির ছাপামূল্য $= x$ টাকা

$\therefore$ রেহাই = ছাপামূল্যের 35%

$= x$-এর 35%

$$= x \times 35 \times \frac{1}{100}$$
$$= \frac{7x}{20}$$

$\therefore$ শাড়িটির বিক্রি মূল্য = ছাপা মূল্য – রেহাই

$$= x - \frac{7x}{20}$$
$$= \frac{20x - 7x}{20}$$
$$= \frac{13x}{20}$$

প্রশ্নানুযায়ী, বিক্রি মূল্য = 3000

$$\therefore \frac{13x}{20} = 3000$$

বা $13x = 3000 \times 20$

বা $x = \frac{3000 \times 20}{13}$

$= 4615.38$ (প্রায়)

$\therefore$ শাড়িটির ছাপা মূল্য $= 4615.38$ টাকা

উদাহরণ 12 ঃ একজন রেডিও দোকানদার কেনা দামের ওপর 25% বৃদ্ধি করে ছাপা মূল্য নির্ধারণ করলেন। এবার তিনি ছাপা মূল্যের ওপর 10% রেহাই দিয়ে বিক্রি করলেন। তাঁর কত শতাংশ লাভ বা লোকসান হল ?

সমাধান ঃ ধরা হ'ল রেডিওটির কেনা দাম $= x$ টাকা

$\therefore$ ছাপা মূল্য $= x + x$ র 25% [x এর 25%]

$$= x + x \times 25 \times \frac{1}{100}$$
$$= x + \frac{x}{4}$$
$$= \frac{5x}{4} \text{ টাকা}$$

রেহাই = ছাপা মূল্যের 10%

$= \frac{5x}{4}$ র 10%

$$= \frac{5x}{4} \times 10 \times \frac{1}{100}$$
$$= \frac{x}{8}$$

$\therefore$ রেডিওটির বিক্রি মূল্য $=$ ছাপা মূল্য $-$ রেহাই

$$= \frac{5x}{4} - \frac{x}{8}$$
$$= \frac{10x - x}{8}$$
$$= \frac{9x}{8}$$

যেহেতু, $\frac{9x}{8} > x$, অতএব দোকানদার লাভ হল।

$\therefore$ লাভের পরিমাণ $=$ বিক্রির দাম $-$ কেনা দাম

$$= \frac{9x}{8} - x$$
$$= \frac{x}{8}$$

$\therefore$ শতকরা লাভ $= \dfrac{\text{লাভ}}{\text{কেনা দাম}} \times 100\%$

$$= \frac{\frac{x}{8}}{x} \times 100\%$$
$$= \frac{x}{8} \times \frac{1}{x} \times 100\%$$
$$= 12.5\%$$

8.3 সর্বমোট খরচ (Overhead Expenses)

কখনও কখনও জিনিস কেনার সময় ক্রয় দাম ছাড়াও কিছু অতিরিক্ত বা আনুষঙ্গিক ব্যয় বহন করতে হয়। যেমন যাতায়াত খরচ, শ্রমিকের খরচ, মেরামতি খরচ ইত্যাদি। এধরণের খরচকে বস্তুটির অতিরিক্ত ব্যয় বলে। অতিরিক্ত ব্যয় সবসময় জিনিসটির কেনা দামের সঙ্গে যোগ হয়ে প্রকৃত কেনা দামের বৃদ্ধি হয়।

অর্থাৎ, প্রকৃত কেনা দাম $=$ জিনিসটির কেনা দাম $+$ অতিরিক্ত ব্যয়

নীচের উদাহরণগুলো লক্ষ করো ঃ

উদাহরণ 13 ঃ এটা আলমারি 2560 টাকায় কিনে যাতায়াতের বাবদ 150 টকা খরচ করলেন। তিনি কত টাকায় আলমারিটি বিক্রি করলে শতকরা 10% লাভ হবে।

সমাধান ঃ আলমারিটির কেনা দাম = 2560.00 টাকা

অতিরিক্ত ব্যয় (যাতায়াত) = 150.00 টাকা

∴ আলমারিটির প্রকৃত কেনা দাম = 2710.00 টাকা

লাভ = প্রকৃত কেনা দামের 10%

= 2710 টাকার 10%

$= 2710 \times 10 \times \frac{1}{100}$

= 271 টাকা

∴ আলমারিটির বিক্রি মূল্য = প্রকৃত কেনা দাম + লাভ

= (2710 + 271) টাকা

= 2981.00 টাকা

উদাহরণ 14 ঃ অমর একটি মোটরসাইকেল 25650 টাকায় কিনে আনল এবং ছোটোখাটো মেরামতির জন্য 1350 টাকা খরচ করল। পরে সে মোটরসাইকেলটি 24000 টাকায় বিক্রি করল, তার কত শতাংশ লোকসান হল?

সমাধান ঃ মোটরসাইকেলটির কেনা দাম = 25650 টাকা

অতিরিক্ত ব্যয় = 1350 টাকা

∴ অমরের প্রকৃত কেনা দাম = (25650 + 1350) টাকা

= 27000 টাকা

মোটরসাইকেলের বিক্রির দাম = 24000 টাকা

∴ লোকসান = প্রকৃত কেনা দাম – বেচা দাম

= (27000 – 24000) টাকা

= 3000 টাকা

∴ শতকরা লোকসান $= \frac{\text{লোকসান}}{\text{প্রকৃত কেনা দাম}} \times 100\%$

$= \frac{3000}{27000} \times 100\%$

$= \frac{1}{9} \times 100\%$

= 11.11% (প্রায়)

অনুশীলনী 8.2

1. একটি রেডিওর ছাপামূল্য 2055 টাকা। 3% রেহাই দিয়ে রেডিওটি বিক্রি করল। রেডিওটির বিক্রির দাম কত?
2. সুমন একটি গণিতের বইয়ে 10% রেহাই পাওয়ার পর 190 টাকায় বইটি কিনল। বইটির ছাপা মূল্য কত ছিল?
3. 700 টাকার ছাপামূল্যের একটি বস্তু রমেন 630 টাকায় কিনে আনল। সে কত শতাংশ রেহাই পেল?
4. একজোড়া সোফাসেটের ছাপামূল্য 30,000 টাকা। নতুন বছরের শুরু বলে দোকানদার সোফাসেটটি 25,000 টাকায় বিক্রি করল তিনি কত শতাংশ রেহাই দিলেন?
5. 10% রেহাই দেওয়ার পর দোকানদার একটি ফ্যান 1260 টাকায় বিক্রি করল। ফেনটির ছাপা মূল্য কত ছিল নির্ণয় করো।
6. একটি ঘড়ির ছাপা মূল্য 1150 টাকা। পূজা উপলক্ষে কত শতাংশ রেহাই দিলে দোকানদার 1000 টাকায় বিক্রি করবে?
7. একজন কাপড়ের দোকানদার 10% রেহাই-র একটি বিজ্ঞাপন দিয়ে কাপড় বিক্রি শুরু করলেন। একজন গ্রাহক 6050 টাকা মূল্যের একজোড়া স্যুট, 575 টাকা মূল্যের একটি কামিজ এবং 875 টাকা মূল্যের একখানি শাড়ি কিনলেন। সেই গ্রাহক মোট কত টাকা রেহাই পেলেন?
8. 200 টাকা মূল্যের একটি বই 175 টাকায় বিক্রি করলে খুচরা বাট্টার হার নির্ণয় করো।
9. একটি ফার্নিচারের দোকান থেকে একজন গ্রাহক 2750 টাকায় একটি টেবিল কিনলে $8\frac{1}{3}\%$ হারে রেহাই পেল। দোকানদার প্রথমে টেবিলটির দাম কত বলেছিল?
10. একজন দোকানদার 600 টাকা ছাপামূল্যের একটি জামায় প্রথমে 30% রেহাই দেওয়ার পর আবার যদি 20% রেহাই দেন তবে সে জামাটি কত টাকায় বিক্রি করবেন এবং মোট শতকরা কত রেহাই দিলেন।
11. কমল একটি গাড়ি 4,00,000 টাকায় কিনে মেরামতি বাবদ 10,000 টাকা খরচ করল। সে সুরেশকে 10% লাভে গাড়িটি বিক্রি করল। সুরেশ পরে আবার গাড়িটি 5% লাভে দীপককে বিক্রি করল। দীপক গাড়িটি কত টাকায় কিনেছে?
12. একজন দোকানদার একটি রেডিও একজন মানুষের থেকে 800 টাকাত কিনলেন। মেরামতির জন্য তিনি 200 টাকা খরচ করলেন আবার রেডিওটি অন্য একজনকে 1300 টাকায় বিক্রি করলেন। তাঁর শতকরা কত লাভ হ'ল।
13. মিগম্ 1200 টাকায় একটি ইস্ত্রি কিনল। যাতায়াত বাবদ তার 40 টাকা খরচ হ'ল। সে কত টাকায় ইস্ত্রিটি বিক্রি করলে 25% লাভ হবে?

8.4 চক্রবৃদ্ধি সুদ (মিশ্রসুদ) (Compound Interest)

সপ্তম শ্রেণির পাঠে সুদ, সুদমূল বা সবৃদ্ধিমূলের বিষয়ে আমরা আলোচনা করেছিলাম। তখন আমরা সুদ বলতে সুদের কথাই বুঝেছিলাম। যেখানে মূলধন সবসময় একই থাকে। এই পাঠে আমরা এক অন্য ধরণের সুদের আলোচনা করব, যেখানে নির্দিষ্ট সময়ের পরে মূলধনের সঙ্গে সেই সময়ের সরল সুদ যোগ হয়ে নতুন বর্ধিত

মূলধনের ওপর সুদ গণনা করা হয়। এভাবে গণনাকে সুদের **চক্রবৃদ্ধি সুদ বা মিশ্রসুদ (Compound Interest)** বলা হয়। এই পাঠে আমরা বিস্তৃতভাবে মিশ্রসুদের বিষয়ে জানব এবং সরল সুদের উপরও অল্প পুনরালোচনা করব।

বিভিন্ন প্রয়োজনে মানুষ বিভিন্ন উৎস বা ব্যাঙ্ক থেকে টাকা ধার নিয়ে থাকে। এভাবে ধার নেওয়া বা ঋণ পরিশোধ করার সময় ধারে নেওয়া টাকার উপর নির্দিষ্ট হারে আরো কিছু টাকা দিতে হয়। এই অতিরিক্ত টাকাকেই সুদ বলে। যে পরিমানের টাকা ধার নেওয়া হয় তাকে **মূলধন (Principal)** বলে। সুদ ও মূলকে একসঙ্গে সুদ-মূল বা **সবৃদ্ধিমূল (Amount)** বলে।

টাকা জমা নেওয়া বা টাকা ধার নেওয়ার ক্ষেত্রে সুদের বন্দোবস্ত থাকে। সচরাচর এমন বন্দোবস্ত 100 টাকার উপর 1 বছরের জন্য হয় এবং এই হারে মূলধন ও সুদ সময়ের উপর ভিত্তি করে সুদের পরিমাণ নির্ণয় করা হয়। এই 100 টাকার 1 বছরের সুদকে **শতকরা বার্ষিক সুদের হার** বা **শতাংশ সুদ (Rate of Interest)** বলা হয়।

উদাহরণ স্বরূপ 100 টাকায় একবছরে 5 টাকা সুদ ধরলে 'শতকরা বার্ষিক হারে' (5 percent per annum) বলা হয়। একে সংক্ষেপে **সুদের হার 5%** বলা হয়। সময়ের উল্লেখ না থাকলে শতকরা বার্ষিক হারকেই বোজায়।

সুদ দুই প্রকার — (a) সরল সুদ (Simple Interest)
(b) মিশ্রসুদ বা চক্রবৃদ্ধি সুদ (Compound Interest)

(a) সরল সুদ : কেবল মূলধনের ওপর সুদ গণনা করলে তাকে সরল সুদ বলে।

সরল সুদ $I = \dfrac{P \times R \times T}{100}$ যেখানে P = মূলধন
R = সুদের হার
T = সুদের সময় (বছরের হিসাব)

সবৃদ্ধিমূল (A) = মূলধন (P) + সুদ (I)

একটি উদাহরণ দেখি এসো

উদাহরণ 15 ঃ শতকরা বার্ষিক 5% হারে 500 টাকার 3 বছরের সরল সুদ এবং সবৃদ্ধিমূল নির্ণয় করো।

প্রথম পদ্ধতি . (ঐকিক নিয়ম)

যেহেতু সুদের হার = 5%

$\therefore$ 100 টাকার 1 বছরের সুদ = 5 টাকা

$\therefore$ 1 টাকার 1 বছরের সুদ $= \dfrac{5}{100}$ টাকা

$\therefore$ 500 টাকার 1 বছরের সুদ $= \dfrac{5}{100} \times 500$ টাকা

= 25 টাকা

500 টাকার 3 বছরের সুদ = 25 × 3 টাকা
= 75 টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় সরল সুদ = 75 টাকা

সবৃদ্ধিমূল = মূলধন (P) + সুদ (I) = 500 + 75 = 575 টাকা

দ্বিতীয় পদ্ধতি . (সূত্র প্রয়োগ করে)

প্রশ্নমতে, সুদের হার $R = 5$

মূলধন $P = 500$

সুদের সময় $T = 3$ বছর

$\therefore$ নির্ণেয় সরল সুদ $I = \dfrac{P \times R \times T}{100}$

$$= \frac{500 \times 5 \times 3}{100}$$

= 75 টাকা

সবৃদ্ধিমূল $A = P + I = 500 + 75 = 575$ টাকা

$\therefore$ সরল সুদ 75 টাকা এবং সবৃদ্ধিমূল 575 টাকা

(b) মিশ্রসুদ বা চক্রবৃদ্ধি সুদ (Compund Interest) ঃ

আমরা আগেই পেয়েছি যে, কেবল মূলধনের ওপর সুদ আরোপ করলে তাকে সরল সুদ বলে। যখন কোনো নির্দিষ্ট সময়ের (6 মাস বা এক বছর) শেষে দেওয়ার সুদ মূলধনের সঙ্গে যোগ হয়ে নতুন বর্ধিত মূলধনের (বা সবৃদ্ধিমূলের) ওপরের সময়ের সুদ গণনা করা হয় তখন সেই সুদকে মিশ্রসুদ বা চক্রবৃদ্ধি সুদ বলে। একটি উদাহরণের সাহায্যে বুঝি এসো—

অরুণের বাবা বছরে 10% হারে 10,000 টাকা ঋণ নিয়ে দুবছরের মাথায় সুদে-মূলে ব্যাঙ্ককে 12,100 টাকা পরিশোধ করলেন। অর্থাৎ 2100 টাকার সুদ দিতে হল। অরুণ সরল সুদের সূত্র $\dfrac{P \times R \times T}{100}$ ব্যবহার করে দেখলেন যে সুদের পরিমাণ 2000 টাকা হয়। অর্থাৎ তার বাবা 100 টাকা বেশি দিলেন। তাঁর মনে প্রশ্ন উদয় হল যে ব্যাঙ্ক 100 টাকা কেন বেশি করে নিল? গণিতের এক শিক্ষককে তিনি এর কারণ জিজ্ঞাসা করলেন। তখন সেই শিক্ষক নীচের কথাগুলো তাঁকে বুঝিয়ে বললেন—

বার্ষিক 10% হারে এক বছরে 10,000 টাকার সুদ হয় 1000 টাকা। দ্বিতীয় বছরে সুদটি মূলধন এর সঙ্গে যোগ হয়ে সেই বছরের মূলধন হয় 11,000 টাকা। এবার, একই হারে 11,000 টাকার দ্বিতীয় বছরটিতে সুদ হিসাবে হয় 1100 টাকা। অতএব সবৃদ্ধিমূল বা সুদমূল হবে 11000 + 1100 = 12100 টাকা। সেজন্য বাবাকে সুদ হিসাবে মোট 2100 টাকা দিতে হয়েছে।

এভাবে যখন কোনো নির্দিষ্ট সময়ের (যেমন একবছর বা ছয় মাস) অন্ততে দেওয়ার সুদ মূলধনের সঙ্গে যোগ হয়ে নতুন বর্ধিত মূলধনের (বা সবৃদ্ধিমূলের) উপর পরের সুদ গণনা করা হয় তখন সেই সুদকে মিশ্রসুদ বা চক্রবৃদ্ধি সুদ বলা হয়। অতএব, চক্রবৃদ্ধি সুদে প্রথম বছরের (বা ছয় মাসের) সুদমূল দ্বিতীয় বছরের (বা ছয় মাসের) মূলধন হয়। আবার দ্বিতীয় বছরের (বা ছয় মাসের) শেষে সুদমূল তৃতীয় বছরের (বা ছয় মাসের) জন্য মূলধন হয়, ইত্যাদি।

নীচের উদাহরণগুলো লক্ষ্য করো ঃ

উদাহরণ 16 ঃ 500 টাকার শতকরা বার্ষিক 10 টাকা হারে 3 বছরের মিশ্রসুদ ও সবৃদ্ধিমূল নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ প্রথম বছরের মূলধন = 500 টাকা

10% হারে 500 টাকার সুদ $500 \times 10\%$ = 50 টাকা

$\therefore$ প্রথম বছরের শেষে সুদমূল = 550 টাকা

অর্থাৎ দ্বিতীয় বছরের মূলধন = 550 টাকা

10% হারে 550 টাকার সুদ $550 \times 10\%$ = 55 টাকা

(এই 550 টাকার ওপর দ্বিতীয় বছরের সুদ গণনা করা হয়)

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের শেষে সুদমূল = 605 টাকা

অর্থাৎ তৃতীয় বছরের মূলধন = 605 টাকা

10% হারে 605 টাকার সুদ $605 \times 10\%$ = 60.50 টাকা

তৃতীয় বছরের শেষে সবৃদ্ধিমূল = 665.50 টাকা

নির্ণেয় মিশ্রসুদ = (665.50 – 500.00) টাকা

= 165.50 টাকা

এবং 3 বছরের সবৃদ্ধিমূল = 665.50 টাকা

উদাহরণ 17 ঃ সুদ গণনার সময় ছয় মাস ধরে বছরে10% হারে সুদ নিলে 1000 টাকার এক বছর 6 মাসের মিশ্রসুদ কত হবে নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ একবছর 6 মাস = $\left(1+\frac{1}{2}\right)$ বছর

বছরে শতকরা 10% হারে সুদ নিলে

100 টাকার 1 বছরের সুদ 10 টাকা

$\therefore$ 100 টাকার 6 মাসের সুদ 5 টাকা [যেহেতু সুদ প্রতি ছমাসের মাথায় হিসাব করা হয়েছে]

প্রথম মূলধন = 1000 টাকা

প্রথম ছমাসের সুদ $1000 \times 5\%$ = 50 টাকা

দ্বিতীয় ছমাসের জন্য মূলধন = 1050 টাকা

দ্বিতীয় ছমাসের জন্য সুদ $= 1050 \times \frac{5}{100}$ টাকা = 52.50 টাকা

তৃতীয় ছমাসের জন্য নতুন মূলধন = (1050+52.50) টাকা = 1102.50 টাকা

তৃতীয় ছমাসের সুদ $1102.50 \times 5\%$ = 55.125 টাকা

$\therefore$ $1\frac{1}{2}$ বছরের পর সুদমূল =1157.625 টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় মিশ্রসুদ = (1157.625 – 1000.00) টাকা

= 157.626 টাকা

= 157.63 টাকা [অনুমানের ওপরে ভিত্তি করে]

অনুশীলনী 8.3

নীচের প্রশ্নগুলোর (1এর থেকে 6 পর্যন্ত) সবৃদ্ধিমূল, মিশ্রসুদ নির্ণয় করো

1. 300 টাকার 3% হারে 2 বছরের।
2. 4,000 টাকার 2% হারে 3 বছরের।
3. 10,000 টাকার 4% হারে 2 বছরের।
4. 7,000 টাকার 3% হারে 3 বছরের।
5. 1,500 টাকার 10% হারে 2 বছরের।
6. 900 টাকার 5% হারে 3 বছরের।
7. প্রতি 6 মাসের পর পর সুদ গণনা করলে 2000 টাকার 1½ বছরে 4% বার্ষিক সুদের হারে মিশ্রসুদ নির্ণয় করো।

8.4.1 মিশ্রসুদের মূল (Formula for Compound Interest) ঃ

ধরো, মূলধন P টাকা

বার্ষিক শতকরা সুদের হার $r\%$

বছরের সংখ্যা n এবং n বছরের মাথায় সুদমূল A_n

প্রথম বছরে মূলধন $= P$

$r\%$ হারে P টাকার 1 বছরের সুদ $= P$র $r\% = P \times \frac{r}{100}$

প্রথম বছরের শেষে সুদমূল (A_1) $= P + P \times \frac{r}{100}$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

∴ দ্বিতীয় বছরের মূলধন $= A_1$

এখন, $r\%$ হারে A_1 টাকার 1 বছরের সুদ $= A_1$র $r\% = A_1 \times \frac{r}{100}$

দ্বিতীয় বছরের শেষে সুদমূল (A_2) $= A_1 + A_1 \times \frac{r}{100}$

$$= A_1\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right) \qquad \left[\because\ A_1 = P\left(1+\frac{r}{100}\right)\right]$$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$\therefore$ তৃতীয় বছরের মূলধন $= A_2$

$r\%$ হারে A_2 টাকার 1 বছরের সুদ $= A_2$র $r\% = A_2 \times \frac{r}{100}$

তৃতীয় বছরের শেষে সুদমূল $(A_3) = A_2 + A_2 \times \frac{r}{100}$

$$= A_2\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left(1+\frac{r}{100}\right) \qquad \left[\because\ A_2 = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\right]$$

$$\therefore\quad A_3 = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$$

এভাবে n বছরের শেষে,

$$\boxed{\text{সুদমূল}\ A_n = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$$

আমরা সুদমূল A_n কে Aর বোঝালে

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$\boxed{\therefore\quad n\ \text{বছরের মিশ্রসুদ} = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - P}$$

লক্ষ্য করো (Observe) ঃ

1. প্রথম বছরের জন্য সরল সুদ (SI_1) আর মিশ্রসুদ (CI_1)-এর মধ্যে পার্থক্য নেই। কারণ মূলধন একই থাকে। অর্থাৎ $SI_1 = CI_1$
2. দ্বিতীয় বছরের শেষে মিশ্রসুদ (CI_2) আর সরল সুদ (SI_2)র তফাৎ

$$CI_2 - SI_2 = \left[P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 - P\right] - \frac{P\times r\times 2}{100}$$

$$= \left[P\left(1+\frac{2r}{100}+\frac{r^2}{10000}\right) - P\right] - \frac{2Pr}{100}$$

$$= P + \frac{2Pr}{100} + \frac{Pr^2}{10000} - P - \frac{2Pr}{100}$$

$$= \frac{Pr^2}{10000}$$

$$\boxed{\therefore \quad CI_2 - SI_2 = \frac{Pr^2}{(100)^2}}$$

উদাহৰণ 18 ঃ 500 টাকাৰ 10% সুদের হারে 3 বছরের শেষে সুদমূল ও মিশ্রসুদ নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ এখানে মূলধন P = 500.00 টাকা

সুদের হার $r\% = 10\%$ বা $r = 10$

সুদের সময় $n = 3$ বছর

$$\therefore \text{ সুদমূল } \quad A = 500\left(1+\frac{10}{100}\right)^3$$

$$= 500\left(1+\frac{1}{10}\right)^3$$

$$= 500 \times \left(\frac{11}{10}\right)^3$$

$$= 500 \times \frac{11\times11\times11}{10\times10\times10}$$

$$= \frac{1331}{2}$$

$$= 665.50$$

$\therefore$ 3 বছরের মিশ্রসুদ $= A - P$

$= (665.50 - 500.00)$ টাকা

$= 165.50$ টাকা

উদাহরণ 19 ঃ বার্ষিক 10% হারে প্রতি ছমাসের মাথায় মিশ্রসুদে হিসাব করলে 1000 টাকার $1\frac{1}{2}$ বছরে মিশ্রসুদ কত হবে নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ এখানে মূলধন P = 1000 টাকা

সুদের হার $r\% = \frac{10}{2}\% = 5\%$

আবার, $1\frac{1}{2}$ বছরে 3 টি ছমাস থাকে। যেহেতু সুদ প্রতি ছমাসে পর পর গণনা করা হয়েছে সুদের সময় $n = 3$

$$\therefore \quad A = 1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$$
$$= 1000 \times \left(1+\frac{1}{20}\right)^3$$
$$= 1000 \times \left(\frac{21}{20}\right)^3$$
$$= 1000 \times \frac{21\times21\times21}{20\times20\times20}$$
$$= \frac{9261}{8}$$
$$= 1157.625$$

= 1157.63 (প্রায়)

∴ নির্ণেয় মিশ্রসুদ $= A - P$

= (1157.63 – 1000.00) টাকা

= 157.63 টাকা (প্রায়)

টীকা ঃ যে সূত্র প্রয়োগ করে উদাহরণগুলো দেখানো হয়েছে তা আগেই আলোচনা করা হয়েছে।

উদাহরণ 20 ঃ মিশ্রসুদে শতকরা বছরে কী হারে 2 বছরে 400 টাকার 441 টাকা হবে?

সমাধান ঃ ধরা হলো সুদের হার $r\%$

এখান, মূলধন (P) = 400 টাকা

সুদের সময় (n) = 2 বছর

সবৃদ্ধিমূল (A) = 441 টাকা

আমরা জানি যে,

$$P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n = A$$
$$\therefore \quad 400\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 = 441$$

বা $\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 = \frac{441}{400} = \left(\frac{21}{20}\right)^2$

উভয় পক্ষের বর্গমূল নিয়ে পাই,

বা $1 + \frac{r}{100} = \frac{21}{20}$

বা $\frac{r}{100} = \frac{21}{20} - 1$

$= \frac{21-20}{20}$

$= \frac{1}{20}$

বা $r = \frac{1}{20} \times 100 = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সুদের হার 5%

উদাহরণ 21 ঃ কোন মূলধনের উপর 2 বছরের মিশ্রসুদ ও সরল সুদের পার্থক্য 150 টাকা হবে, যদি সুদের হার 4% হয়?

সমাধান ঃ ধরা হ'ল মূলধন = P টাকা

সুদের সময় $n = 2$ বছর

সুদের হার $r\% = 4\%$ বা $r = 4$

আমরা জানি যে,

$$CI_2 - SI_2 = \frac{Pr^2}{(100)^2}$$

শর্তমতে $150 = \frac{Pr^2}{100^2}$

বা $150 = \frac{P \times 4^2}{100^2}$

বা $16P = \frac{16P}{10000}$

বা $P = \frac{150 \times 10000}{16}$

$= 150 \times 625$

$= 93750$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলধন $= 93750$ টাকা

উদাহরণ 22 ঃ এক বছরে একটি শহরের জনসংখ্যা 2% বৃদ্ধি হয়। কিন্তু পরের বছরে 2% জনসংখ্যা কমে। যদি 2 বছরের শেষে শহরটির মোট জনসংখ্যা 249900 থাকে, তবে প্রথম বছরের শুরুতে জনসংখ্যা কত ছিল?

সমাধান ঃ ধরা হলো শুরুর জনসংখ্যা $= P$

2% বৃদ্ধির হারে প্রথম বছরের শেষে মোট জনসংখ্যা $= P\left(1+\frac{2}{100}\right)$

$= \frac{51}{50}P$

অর্থাৎ দ্বিতীয় বছরের শুরুরে জনসংখ্যা $= \frac{51}{50}P$

প্রশ্নমতে দ্বিতীয় বছরের শেষে মোট জনসংখ্যা 2% কমে। অর্থাৎ $r = -2$

অতএব, দুই বছরের শেষে মোট জনসংখ্যা $= \frac{51}{50}P\left(1+\frac{-2}{100}\right)$

$= \frac{51}{50}P \times \frac{98}{100}$

$= \frac{51}{50} \times \frac{49}{50}P$

শর্তমতে, $\frac{51}{50} \times \frac{49}{50}P = 249900$

বা $\frac{51 \times 49P}{50 \times 50} = 249900$

বা $P = \frac{24990 \times 50 \times 50}{51 \times 49}$

$= 2,50,000$

$\therefore$ প্রথম বছরের শুরুতে শহরটির জনসংখ্যা ছিল 2,50,000 জন।

(লক্ষ্য করো যে এই উদাহরণটি চক্রবৃদ্ধি সুদ সম্পর্কীয় নয়, যদিও এর সমাধানে ব্যবহৃত পদ্ধতিটি একই ধরণের)

অনুশীলনী 8.4

নীচের প্রশ্নগুলোর (1 থেকে 6 পর্যন্ত) সূত্র প্রয়োগ করে সুদমূল (সমৃদ্ধিমূল) এবং মিশ্রসুদ নির্ণয় করো।

1. 300 টাকার 3% হারে 2 বছরের।
2. 4,000 টাকার 2% হারে 3 বছরের।
3. 10,000 টাকার 4% হারে 2 বছরের।
4. 7,000 টাকার 3% হারে 3 বছরের।
5. 1,500 টাকার 10% হারে 2 বছরের।
6. 900 টাকার 5% হারে 3 বছরের।
7. 1000 টাকার বার্ষিক 4% সুদের হারে 9 মাসের মিশ্রসুদ সূত্র প্রয়োগ করে নির্ণয় করো, যদি প্রতি 3 মাসের মাথায় সুদ গণনা করা হয়।
8. প্রতি 6 মাসের মাথায় সুদ গণনা করলে 2000 টাকার 1½ বছরে 4% বার্ষিক সুদের মিশ্রসুদ নির্ণয় করো।
9. মিশ্রসুদে কত মূলধনের 4% বার্ষিক সুদের হার 2 বছরে সুদমূল 4500 টাকা হবে?
10. মিশ্রসুদে বার্ষিক শতকরা কত হারে 576 টাকা 2 বছরের মাথায় 625 টাকা হবে?
11. বছরে চক্রবৃদ্ধি শতকরা কত হারে 3 বছরের মাথায় 64 টাকা, 125 টাকা হবে নির্ণয় করো।
12. 500 টাকার বার্ষিক শতকরা 10 টাকা হারে 2 বছরের শেষে মিশ্রসুদ ও সরল সুদের পার্থক্য নির্ণয় করো।
13. কত টাকা 2 বছরে 4% হারে চক্রবৃদ্ধি ও সরল সুদের পার্থক্য 1 টাকা হবে নির্ণয় করো।

8.5 পণ্য সামগ্রী এবং সেবা কর (Goods and Service Tax) ঃ

কর হল কোনো ব্যক্তি ব্যবসায়িক প্রতিষ্ঠান অথবা কোনো সংগঠন যা বাধ্যতামূলকভাবে সরকারকে সময়মতো দেওয়া ধনের পরিমাণ, যে ধন সরকার জনসাধারণের সেবার্থে কাজে লাগায়। কর প্রধানত দুই প্রকার— প্রত্যক্ষ **(Direct Tax)** ও পরোক্ষ **(Indirect Tax)** কর।

প্রত্যক্ষ কর হল এমন এক ধরণের যা জনসাধারণের থেকে সরকার তাদের আয় তথা সংগৃহীত বিষয়-সম্পত্তির ওপরে ভিত্তি করে আদায় করে।

পরোক্ষ কর হল অন্য এক ধরণের কর যা কোনো মধ্যবর্তী সংগঠনের মাধ্যমে জনসাধারণের থেকে আদায় করা হয়। বিক্রি কর, সেবা কর, আবকারি কর, আমোদ কর, মূল্য সংযোজিত কর ইত্যাদি করসমূহ করের আওতায় ধরা হয়। বর্তমান এই পরোক্ষ করসমূহ এক সঙ্গে করে পণ্যসামগ্রী ও সেবা কর বা জি এস টি নাম দেওয়া হয়েছে। মূলত এক ধরণের কর ব্যবস্থা প্রবর্তনের উদ্দেশ্যে জি এস টি প্রণয়ন করা হয়েছিল, কিন্তু এখন পর্যন্ত সেটি সম্ভব হয়ে ওঠেনি।

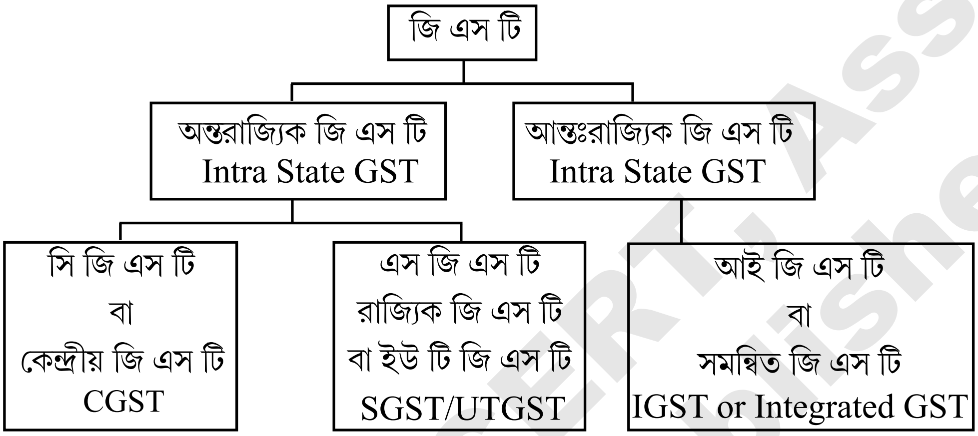
জি এস টি প্রধানত দুই প্রকারের (1) অন্তরাজ্যিক জি এস টি (Intra State GST) এবং (2) আন্তঃরাজ্যিক জি এস টি (Inter State GST)

অন্তরাজ্যিক লেনদেনে দেওয়া কর হল —

(i) সি জি এস টি (Central GST) এবং

(ii) এস জি এস টি (State GST)/ইউ টি জি এস টি বা কেন্দ্রীয় শাসিত অঞ্চল জিএসটি

নিম্নোক্ত ছবিটি জি এস টি-র শ্রেণিসমূহ স্পষ্টভাবে বুঝতে সাহায্য করবে।



8.5.1 বিভিন্ন বিক্রির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য জি এস টির শ্রেণিসমূহ (GST Slabs on Sale)

বিক্রির পরিসর	আরোপিত কর
রাজ্যের ভিতরে স্থানীয় বিক্রির ক্ষেত্রে	সি জি এস টি + এস জি এস টি/ইউ টি জি এস টি
রাজ্যের বাইরে কেন্দ্রীয় বিক্রির ক্ষেত্রে	আই জি এস টি (Integrated GST) অর্থাৎ সমন্বিত জি এস টি

জি এম টির হার (Rate of GST)

ধরা যাক সরকার কোনো সামগ্রীর ওপর 5% জি এস টি ঘোষণা করলেন। আমরা যদি সামগ্রীগুলো রাজ্যের ভিতরে বিক্রি করি তাহলে আমরা 2.5% সি জি এস টি এবং 2.5% এস জি এছ টি আদায় করতে হবে।

যদি সামগ্রীগুলো রাজ্যের বাইরে বিক্রি করি তাহলে আমরা 5% জি এস টি আদায় করতে হবে।

অত এব

আই জি এস টির ওপর আরোপিত হার = সি জি এস টির ওপর আরোপিত কর + এস জি এস টি/ইউ টি জি এস টির ওপরে আরোপিত কর।

নীচের রেখাচিত্রটি লক্ষ্য করো ঃ

বিক্রির ধরণ

রাজ্যের ভিতরে স্থানীয় বিক্রি	আন্তঃরাজ্যিক বিক্রি
↓	↓
আরোপিত কর সি জি এস টি + এস জি এস টি	আরোপিত কর আই জি এস টি

ধরা যাক বিক্রি মূল্য = 100000 টাকা
সি জি এস টি 2.5% = 2500 টাকা
এস জি এস টি 2.5% = 2500 টাকা
মোট =1 05000 টাকা

বিক্রি মূল্য = 100000 টাকা
আই জি এস টি 5% = 5000 টাকা
মোট = 105000 টাকা

উদাহরণ 23 ঃ ধরা হল, সামগ্রীর ওপর সি জি এম টির হার 9% এবং এস জি এস টির হার 9%. 20000 টাকা বিক্রি মূল্যর একটি বিল প্রস্তুত করো, যদি বিক্রি স্থানীয় পর্যায়ে অর্থাৎ রাজ্যটির ভিতর হয়।

সমাধান ঃ

বিক্রি মূল্য 20000 টাকা
সি জি এস টি (9%) 1800 টাকা
এস জি এস টি (9%) 1800 টাকা
মোট 23600 টকা

উদাহরণ 24 ঃ ওপরের সমস্যাটি যদি বিক্রি আন্তরাজ্যিক পর্যায়ে হয়, তাহলে কী হবে?

সমাধান ঃ

বিক্রি মূল্য 20000 টাকা
আই জি এস টি (18%) 3600 টাকা
মোট 23,600 টাকা

উদাহরণ 25 ঃ অসমের ভিতর আদান-প্রদান করাতে সর্বোচ্চ খুচরা মূল্য = 12,000 টাকা, রেহাই = 30%, জি এস টি = 18% অনুসারে মোট রেহাই পরিমাণ, বিক্রি মূল্য, সি জি এস টি, এস জি এস টি ও আই জি এস টি নির্ধারণ করো এবং সেই সঙ্গে বিলের পরিমাণ বের করো।

সমাধান ঃ এখানে সর্বোচ্চ খুচরা মূল্য 12000 টাকা

30% রেহাইর জন্য মোট পরিমাণ = 12000 টাকার 30%

$= \frac{30}{100} \times 12000$ টাকা

= 3600 টাকা

অতএব বিক্রি মূল্য = (12000 – 3600) টাকা

= 8400 টাকা

সি জি এস টি = 8400 টাকার 9%

= $8400 \times \frac{9}{100}$ টাকা

= 756 টাকা

এস জি এস টি = 8400 টাকার 9% = 756 টাকা

আই জি এস টি = 0

বিলের পরিমাণ = বিক্রি মূল্য + সি জি এস টি + এস জি এস টি

= (8400 + 756 + 756) টাকা

= 9912 টাকা

অনুশীলনী 8.5

1. দিল্লির একটি প্রতিষ্ঠানের থেকে জয়পুরের একটি প্রতিষ্ঠানের লেনদেন হিসাব এরকম—
সর্বোচ্চ খুচরা মূল্য 60,000 টাকা, রেহাই 20%, জি এস টি (GST) 28%
হলে রেহাইর পরিমাণ, বিক্রি মূল্য, সি জি এস টি, এস জি এস টি, আই জি এস টি— এবার বিলের পরিমাণ বের করো।

2. গুয়াহাটির একটি বিতরণ কেন্দ্রের থেকে ধুবড়ির একটি বিতরণ কেন্দ্র লেনদেনের হিসাব এধরণের— সর্বোচ্চ খুচরা মূল্য 90,000 টাকা, রেহাই 30%, এস জি এস টি 9%, সি জি এস টি 9% হলে বিক্রি মূল্য, এস জি এস টি, সি জি এস টি, আই জি এস টি এবার বিলের পরিমাণ বের করো।

3. নীচের বিলটির শূন্যস্থান পূরণ করে বিলের পরিমাণ বের করো—

সামগ্রী	সামগ্রীর সংখ্যা	সর্বোচ্চ খুচরা মূল্য (MRP)	মোট (MRP)	রেহাই	রেহাইর পরিমাণ	বিক্রি মূল্য	সি জি এস টি 2.5%	এস জি এস টি 2.5%
A	12	50	600	10%	60	540	13.50	13.50
B	30	60	1800	15%	-----	-----	38.25	-----
C	10	35	-----	12%	-----	308	-----	7.70
D	6	15	-----	10%	-----	-----	-----	-----
						-----	-----	-----

আমরা কী কী শিখলাম

1. লাভ বা লোকসান হওয়া কেনা দামের ওপর নির্ভরশীল। যখন একটি জিনিসের বিক্রির দাম কেনা দামের থেকে বেশি হয় তখন বিক্রেতার লোকসান হয়। অতএব—

   (i) লাভ = বেচা দাম – কেনা দাম $\qquad p = \mathrm{SP} - \mathrm{CP}$

   (ii) লোকসান = কেনা দাম – বিক্রিরদাম $\qquad l = \mathrm{CP} - \mathrm{SP}$

   (iii) লোকসানের শতাংশ $(p\%) = \dfrac{\text{লাভ}}{\text{কেনা দাম}} \times 100\%$ বা $\left(\dfrac{\mathrm{SP}-\mathrm{CP}}{\mathrm{CP}}\right) \times 100\%$

   (iv) লোকসানেব শতাংশ $(l\%) = \dfrac{\text{লোকসান}}{\text{কেনা দাম}} \times 100\%$ বা $\left(\dfrac{\mathrm{CP}-\mathrm{SP}}{\mathrm{CP}}\right) \times 100\%$

   (v) বিক্রির দাম $= \dfrac{100 - \text{লোকসান}}{100} \times$ কেনা দাম, কেনা দাম $= \dfrac{100}{100 - \text{লোকসানের শতাংশ}} \times$ বেচা দাম

   (vi) বেচা দাম $= \left(\dfrac{100 + \text{লাভের শতাংশ}}{100}\right) \times$ কেনা দাম $= \left(\dfrac{100}{100 - \text{লোকসানের শতাংশ}}\right) \times$ বেচা দাম

2. রেহাই বা বাট্টা সবসময় বস্তুটির ছাপামূল্যের ওপর নির্ধারিত করা হয়।

   রেহাই= ছাপামূল্য (MP) – বিক্রি মূল্য (SP)

   শতকরা রেহাই= $\dfrac{\text{রেহাই}}{\text{ছপামূল্য}} \times 100\%$ $\qquad$ বা $\left(\dfrac{\mathrm{MP}-\mathrm{SP}}{\mathrm{MP}}\right) \times 100\%$

3. একটি জিনিস কেনার সময় সঙ্গে যতখানি অতিরিক্ত করতে হয় তাকে অতিরিক্ত (Extra) ব্যয় বলে। একটি জিনিসের প্রকৃত কেনা দাম = কেনা দাম + অতিরিক্ত ব্যয়

4. গত বছরের সমৃদ্ধি মূল্যের ওপর যে সুদ বের করা হয়, সেই সুদকে মিশ্রসুদ বলে। মিশ্রসুদ এবং সরল সুদ প্রথম বছরে একই পরিমাণের। তার পরের বছরগুলোকে মিশ্রসুদ > সরল সুদ

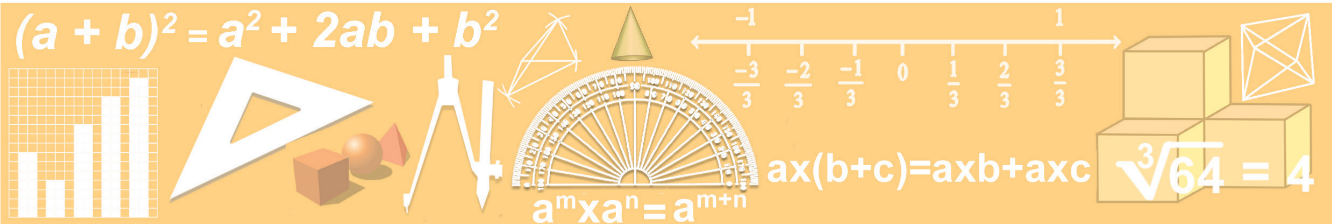
5. সবৃদ্ধিমূল বের করার সূত্রটি হচ্ছে — $\mathrm{A} = \mathrm{P}\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^n$

   যেখানে $\quad$ A = সবৃদ্ধিমূল, P = মূলধন, r = বার্ষিক সুদের হার, n = বছরের সংখ্যা

   অন্যদিকে মিশ্রসুদ $= \mathrm{A} - \mathrm{P} = \mathrm{P}\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^n - \mathrm{P}$

6. জি এস টি হচ্ছে এক ধরণের পরোক্ষ কর। জি এস টি কর দুই প্রকার— আন্তঃরাজ্যিক কর আবার দুই ধরনের— সি জি এস টি এবং এস জি এস টি। আন্যদিকে আন্তঃ রাজ্যিক কর হচ্ছে আই জি এস টি।

❑❑❑



অধ্যায়-9 বীজগণিতীয় রাশি এবং অভেদসমূহ

(Algebraic Expressions and Identities)

F9U4Y3

আমরা আগের শ্রেণিতে বীজগণিতীয় রাশির পাঠে কী কী শিখেছিলাম মনে করি এসো—

☆ বীজগণিতীয় রাশির গঠন

☆ রাশির পদ এবং পদের উৎপাদকসমূহ

☆ সহগ, সদৃশ এবং অসদৃশ পদ

☆ একপদ, দ্বিপদ, ত্রিপদ এবং বহুপদ রাশি

☆ বীজগণিতীয় রাশির যোগ ও বিয়োগ

☆ চলকের নির্দিষ্ট মানের জন্য রাশির মান নির্ণয়।

এই অধ্যায়ে আমরা বীজগণিতীয় রাশির গুণের বিষয়ে আলোচনা করব তার আগে বীজগণিতীয় রাশির যোগ ও বিয়োগ করার নিয়মসমূহ মনে করি এসো।

☆ দুটি সদৃশ পদই যোগ নয়ত বিয়োগ করা যায়।

☆ সাংখ্যিক সহগযুক্ত দুটি বা তার থেকে বেশি সদৃশ পদের যোগফল বা বিয়োগ ফল সাংখ্যিক সহগের যোগ বা বিয়োগফলের সাহায্যে করা হয়। যেমন — $3x + 2x = (3+2)x = 5x$, $7x - 3x = (7-3)x = 4x$ ইত্যাদি।

☆ অসদৃশ পদগুলো যোগ বা বিয়োগ করা যায় না।

☆ দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় রাশির যোগ নয়ত বিয়োগ করার সময় সদৃশ পদগুলো একসঙ্গে করে যোগ বা বিয়োগ করতে হয় এবং অসদৃশ পদগুলো যেভাবে আছে সেভাবে রাখতে হয়।

9.1 বীজগণিতীয় রাশির গুণ (Multiplication of Algebraic Expressions) :

তোমরা ইতিমধ্যে পরিমেয় সংখ্যার ক্ষেত্রে বিভিন্ন বিধি শিখেছ। উদাহরণ স্বরূপে, যদি a, b, c যে কোনো তিনটি পরিমেয় সংখ্যা হয় তাহলে

$a + b = b + c$	[যোগের ক্রম বিনিয়ম বিধি]
$(a + b) + c = a + (b + c)$	[যোগের সহযোগ বিধি]
$a \times b = b \times a$	[গুণের ক্রম বিনিময় বিধি]
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$	[গুণের সহযোগ বিধি]
$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	[যোগের ওপর গুণের বিতরণ বিধি]
$1 \times a = a$	[গুণের অভেদ বিধি]
$0 \times a = 0$	
$a + 0 = a = 0 + a$	[যোগের অভেদ বিধি]

যেহেতু বীজগণিতীয় চিহ্নগুলো সংখ্যা বোঝাতে ব্যবহার করো হয়, অতএব সংখ্যার সবগুলো বিধি বীজগণিতীয় রাশির ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য হবে।

মনে করো

ধনাত্মক, ঋণাত্মক অথবা উভয় প্রকারের রাশির গুণের ক্ষেত্রে অনুসরণ করতে হবে এমন বিধিসমূহ

$(+)\times(+) = +$ $7 \times 3 = 21$	$(+)\times(-) = -$ $7 \times (-3) = -21$	$(-)\times(+) = -$ $(-7) \times 3 = -21$	$(-)\times(-) = +$ $(-7) \times (-3) = 21$

9.1.1 দুটি বা ততোধিক একপদ রাশির গুণ (Multiplication of two or more monomials) :

নীচের উদাহরণগুলি লক্ষ করো—

(i) $5 \times 6x = 5 \times (6 \times x) = (5 \times 6) \times x = 30x$ [গুণের সহযোগ বিধি]

(ii) $x \times 7y = x \times 7 \times y = (x \times 7) \times y = (7 \times x) \times y$ [ক্রম বিনিময় বিধি]

$= 7 \times x \times y = 7xy$

(iii) $6x \times (-7y) \times 8xy = 6 \times x \times (-7) \times y \times 8 \times x \times y$

$= 6 \times (-7) \times 8 \times x \times y \times x \times y$ (ক্রম বিনিময় বিধি)

$= (-42) \times 8 \times x \times x \times y \times y$ (ক্রম বিনিময় বিধি)

$= -336 \times x^2 \times y^2$ [খেয়াল করো, $x\times x = x^{1+1} = x^2$ এবং $y \times y = y^{1+1} = y^2$]

$= -336x^2y^2$

খেয়াল করো

গুণফলের সাংখ্যিক সহগ = রাশিগুলোর সাংখ্যিক সহগের গুণফল
গুণফলের বীজগণিতীয় সহগ = উৎপাদকগুলোর বীজগণিতীয় সহগের গুণফল

অতএব দুটি বা ততোধিক একপদ রাশির গুণের ক্ষেত্রে প্রথমে রাশিকয়টির সহগগুলো পাশাপাশি লিখে এক জাতীয় বীজগণিতীয় উৎপাদকগুলো পাশাপাশি লিখতে হয়। তারপর সহগগুলোর গুণফল বের করতে হয়। (শেষে সংখ্যা এবং চলকগুলোর মধ্যে থেকে গুণ (×) চিহ্ন উঠিয়ে দিতে হয়।)

অন্য কয়েকটি উদাহরণ লক্ষ্য করো—

উদাহরণ 1 ঃ গুণফল বের করো ঃ $5x \times (-8x^3y)$

সমাধান ঃ $5x \times (-8x^3y)$

$= 5 \times (-8) \times x \times x^3 \times y$

$= -40 \times x^4 \times y$

$= -40x^4y$

সূচকের বিধি
$a^m \times a^n = a^{m+n}$

উদাহরণ 2 ঃ গুণফল বের করো— $3l^2m \times 4lm^2 \times 5mn$

সমাধান ঃ $3l^2m \times 4lm^2 \times 5mn$

$= 3 \times 4 \times 5 \times l^2 \times l \times m \times m^2 \times m \times n$

$= 60 \times l^3 \times m^4 \times n$

$= 60l^3m^4n$

কার্য ঃ নীচে দেওয়া তালিকাটির খালি ঘরগুলো সম্পূর্ণ করো

$\times$	$6x$	$-3y$	$7xy$	$-5x^2y$	$8x^2y^3$
$6x$		$6x \times (-3y)$ $= -18xy$			
$-3y$	$(-3y) \times 6x$ $= -18xy$				
$7xy$					
$-5x^2y$				$(-5x^2y)$ $\times (-5x^2y)$ $= 25x^4y^2$	
$8x^2y^3$			$8x^2y^3 \times 7xy$ $= 56x^3y^4$		

9.1.2 একপদ রাশিক দ্বিপদ বা ত্রিপদ রাশি দিয়ে গুণ করো (Multiplication of a monomial by a binomial or trinomial) :

এই উদাহরণটি খেয়াল করো $3 \times 204 = 612$

একে আমরা এভাবেও লিখতে পারি

$3 \times 204 = 3 \times (200 + 4)$

$= (3 \times 200) + (3 \times 4)$ [$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ বিধি ব্যবহার করে]

$= 600 + 12$

$= 612$

লক্ষ্য করেছ কি, আমরা এখানে গুণের বিতরণ বিধি ব্যবহার করেছি। বীজগণিতীয় রাশির গুণের ক্ষেত্রেও যখন একপদ, দ্বিপদ বা বহুপদ রাশির গুণের কথা আসে তখন এই বিধি ব্যবহার করতে হবে।

উদাহৰণ 3 ঃ গুণফল বের করো ঃ $3x \times (9x^2 + 3)$

সমাধান ঃ $3x \times (9x^2 + 3) = (3x \times 9x^2) + (3x \times 3)$ [$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ বিধি ব্যবহার করে]

$= 3 \times 9 \times x \times x^2 + 3 \times 3 \times x$

$= 27x^3 + 9x$

উদাহৰণ 4 ঃ গুণফল বের করো ঃ $(3x + 5xy) \times 2x^2$

সমাধান ঃ $(3x + 5xy) \times 2x^2 = (3x \times 2x^2) + (5xy \times 2x^2)$

$= 3 \times 2 \times x \times x^2 + 5 \times 2 \times x \times x^2 \times y$

$= 6x^3 + 10x^3y$

$\boxed{(a + b) \times c = a \times c + b \times c}$

উদাহৰণ 5 ঃ গুণফল বের করো ঃ $3m^2 \times (5m^2 - 2m + 1)$

সমাধান ঃ $3m^2 \times (5m^2 - 2m + 1) = (3m^2 \times 5m^2) - (3m^2 \times 2m) + (3m^2 \times 1)$

$= 3 \times 5 \times m^2 \times m^2 - 3 \times 2 \times m^2 \times m + 3m^2$

$= 15m^4 - 6m^3 + 3m^2$

9.1.3 দ্বিপদ রাশিক দ্বিপদ বা ত্রিপদ রাশি দ্বারা গুণ (Multiplication of binomial by a binomial or trinomial) :

ধরো যে দুটি দ্বিপদ রাশি $(3x + 2)$ এবং $(7x + 3y)$ গুণ করতে হবে। আগের মতো এখানেও গুণের বিতরণ বিধি ব্যবহার করতে হবে।

$(3x + 2) \times (7x + 3y) = 3x \times (7x + 3y) + 2 \times (7x + 3y)$

$= (3x \times 7x) + (3x \times 3y) + (2 \times 7x) + (2 \times 3y)$

$= 21x^2 + 9xy + 14x + 6y$

উদাহৰণ 6 ঃ গুণফল বের করো ঃ $(7x + 2y) \times (11x - 4y)$

সমাধান ঃ $(7x + 2y) \times (11x - 4y) = 7x \times (11x - 4y) + 2y \times (11x - 4y)$

$= (7x \times 11x) - (7x \times 4y) + (2y \times 11x) - (2y \times 4y)$

$= 77x^2 - 28xy + 22yx - 8y^2$

$= 77x^2 - 28xy + 22xy - 8y^2$ [$\because xy = yx$]

$= 77x^2 - 6xy - 8y^2$

উদাহৰণ 7 ঃ গুণফল বের করো ঃ $(4xy^2 + 5) \times (3xy - 5xy^2)$

সমাধান ঃ $(4xy^2 + 5) \times (3xy - 5xy^2)$

$= 4xy^2 \times (3xy - 5xy^2) + 5 \times (3xy - 5xy^2)$

$= (4xy^2 \times 3xy) - (4xy^2 \times 5xy^2) + (5 \times 3xy) - (5 \times 5xy^2)$

$= 12x^2y^3 - 20x^2y^4 + 15xy - 25xy^2$

এখানে সদৃশ পদ নেই

এখন ধরো দ্বিপদ রাশি $(a + 2b)$কে ত্রিপদ রাশি $(2a^2b + 2a + 3b)$ র দ্বারা গুণ করতে হবে।

$$\begin{aligned}(a + 2b)(2a^2b + 2a + 3b) &= a \times (2a^2b + 2a + 3b) + 2b \times (2a^2b + 2a + 3b)\\ &= 2a^3b + 2a^2 + 3ab + 4a^2b^2 + 4ab + 6b^2\\ &= 2a^3b + 2a^2 + 4a^2b^2 + (3ab + 4ab) + 6b^2\\ &= 2a^3b + 2a^2 + 4a^2b^2 + 7ab + 6b^2\end{aligned}$$

উদাহরণ 8 ঃ গুণফল বের করো ঃ $(3x^2 + 2x + 5) \times (2x^2 - 3)$

সমাধান ঃ $(3x^2 + 2x + 5) \times (2x^2 - 3)$

$$\begin{aligned}&= 3x^2 \times (2x^2 - 3) + 2x \times (2x^2 - 3) + 5 \times (2x^2 - 3)\\ &= 6x^4 - 9x^2 + 4x^3 - 6x + 10x^2 - 15\\ &= 6x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 10x^2 - 6x - 15\\ &= 6x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x - 15\end{aligned}$$

সরল করো ঃ

উদাহরণ 9 ঃ $2xy\,(x - y)$ এর সঙ্গে $3x\,(2xy + 5y)$ যোগ করো

সমাধান ঃ প্রথম রাশি $= 2xy\,(x - y) = 2x^2y - 2xy^2$

দ্বিতীয় রাশি $= 3x\,(2xy + 5y) = 6x^2y + 15xy$

রাশি দুটি যোগ করে,

$$\begin{array}{rrrr} & 2x^2y & -2xy^2 & \\ + & 6x^2y & & +15xy \\ \hline & 8x^2y & -2xy^2 & +15xy \end{array}$$

উদাহরণ 10 ঃ $(4y + 3)(3y^2 + 5y - 7)$ এর সঙ্গে $5(y^3 - 4y^2 + 2)$ যোগ করো ।

সমাধান ঃ প্রথম রাশি $= (4y + 3)(3y^2 + 5y - 7)$

$= 4y\,(3y^2 + 5y - 7) + 3\,(3y^2 + 5y - 7)$ [বিতরণ বিধি প্রয়োগ করে]

$= 12y^3 + 20y^2 - 28y + 9y^2 + 15y - 21$ [বিতরণ বিধি প্রয়োগ করে]

$= 12y^3 + (20y^2 + 9y^2) - (28y - 15y) - 21$

$= 12y^3 + 29y^2 - 13y - 21$

দ্বিতীয় রাশি $= 5\,(y^3 - 4y^2 + 2)$

$= 5y^3 - 20y^2 + 10$ [বিতরণ বিধি প্রয়োগ করে]

রাশি দুটি যোগ করে পাই

$$\begin{array}{rrrrr} & 12y^3 & +29y^2 & -13y & -21 \\ + & 5y^3 & -20y^2 & & +10 \\ \hline & 17y^3 & +9y^2 & -13y & -11 \end{array}$$

উদাহৰণ 11 ঃ $(l + m)(3l + 2m)$ -এর থেকে $m(12l - m)$ বিয়োগ করো

সমাধান ঃ প্রথম রাশি $= (l + m)(3l + 2m)$

$= l(3l + 2m) + m(3l + 2m)$

$= 3l^2 + 2ml + 3ml + 2m^2$

$= 3l^2 + 5ml + 2m^2$

দ্বিতীয় রাশি $= m(12l - m)$

$= 12ml - m^2$

প্রথম রাশির থেকে দ্বিতীয় রাশি বিয়োগ করে,

$$\begin{array}{rrrrr} & 3l^2 & + & 5ml & + & 2m^2 \\ (-) & & & 12ml & - & m^2 \\ & & & (-) & & (+) \\ \hline & 3l^2 & - & 7ml & + & 3m^2 \end{array}$$

উদাহৰণ 12 ঃ রাশিগুলো সরল করো ঃ

(i) $(2p + 4)(3p + 8)$

(ii) $n(6 + m) - 2(m - n)$

সমাধান ঃ (i) $(2p + 4)(3p + 8) = 2p(3p + 8) + 4(3p + 8)$

$= 6p^2 + 16p + 12p + 32$

$= 6p^2 + 28p + 32$

(ii) $n(6 + m) - 2(m - n) = 6n + mn - 2m + 2n$

$= 6n + 2n + mn - 2m$

$= 8n + mn - 2m$

অনুশীলনী 9.1

1. গুণফল বের করো ঃ

(i) $3x^2 \times 11xy \times \frac{2}{3}y^2$ (ii) $(-5x) \times 3a^2 \times (-3ax)$

(iii) $(-3pq) \times (-15p^3q^3) \times q^2$ (iv) $3x(5x^2 + 8)$

(v) $\frac{2}{3}y(18y^2 - y)$ (vi) $(-8a^3)(a + 3b + 2c)$

(vii) $(3mn - 2n)(-2m^2n)$ (viii) $(9x^2 + 4x + 3) \times 11x$

(ix) $(20a^2 - 3b^2 + ab) \times (-7b^2)$ (x) $3x^3y^2(xy + xy^3 - 2)$

2. গুণফল বের করো ঃ

(i) $(x^2 + y)(3x^2y - y^2)$ (ii) $(7x - 2y)(2x + 7y)$

(iii) $\left(\frac{1}{4}a^2 + 3b\right)\left(a^3 + \frac{2}{3}b^2\right)$ (iv) $(1.5x - 2.5y)(2.5x - 1.5y)$

(v) $(3x + 4y)(2x^2 + 3y + xy)$ (vi) $(2xy + 5x^2)(x^5y^4 - x^3y^2 + xy)$

(vii) $(3a^2b^2 - 4c)(a^3b^3 + 2a^4b^3c^3 - 6abc)$

(viii) $(4x^2y - 5xy^2 + 3xy)(3x^3y - 2)$ (ix) $(2x + 3y + z)(5x + 2y + 1)$

(x) $(3x^3 - 2y^2 + z)(3x^3 + 2y^2 - z)$

3. নীচের রাশিগুলো সরল করো ঃ

(i) $3x(5x + 8) - 10x$

(ii) $(2m + 3m^2)(-2mn)$

(iii) $8(3a + 4b) + 5$

(iv) $2x^2(4x - 1) + 3x(x - 3)$

4. সরল করো ঃ

(i) $(p + q^2)(q^2 - p) + 15$

(ii) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) + 3b^3$

(iii) $y^2(y^3 + 3x) + y(2xy + y^2)$

(iv) $\left(\frac{2}{3}x^4y^3 + \frac{4}{9}xy^3\right) \times \frac{1}{4} - \frac{1}{6}x^4y^3$

(v) $y^3(4y + 5) - (2y + 1)(y^3 + 2y^2 + 1)$

(vi) $(1{\cdot}2l - 2{\cdot}5m)(2{\cdot}5l + 0{\cdot}2m + 1{\cdot}2) + 0{\cdot}06l + 7m$

9.2 কয়েকটি বীজগণিতীয় অভেদ (Some algebraic identities) :

যে সমতাগুলোর উক্তি চলকের যে কোনো মানের জন্য শুদ্ধ হয় সেরকম উক্তিকে **অভেদ (Identity)** বলে। এখন আমরা বীজগণিতে সচরাচর প্রয়োগ হওয়া কয়েকটি অভেদের বিষয়ে আলোচনা করব। এই অভেদসমূহ একটি **দ্বিপদ রাশিকে অন্য একটি দ্বিপদ রাশির দ্বারা গুণ করে পাওয়া যায়।**

9.2.1 প্রথমে আমরা **দ্বিপদ রাশি $(x + a)$ কে দ্বিপদ রাশি $(x + b)$ দ্বারা গুণ** করি এসো।

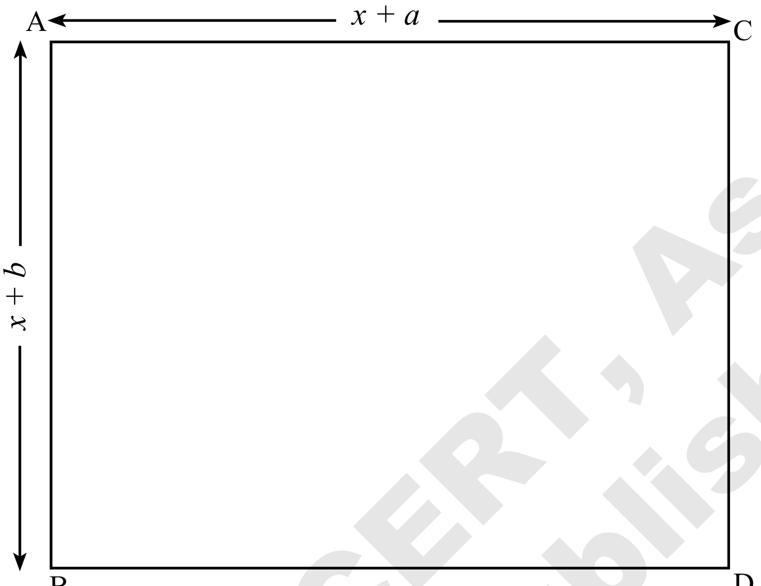
$$\begin{aligned}(x + a)(x + b) &= x(x + b) + a(x + b)\\ &= x^2 + xb + ax + ab\\ &= x^2 + bx + ax + ab\\ &= x^2 + (a + b)x + ab\end{aligned}$$

বিতরণ বিধি ও ক্রম বিনিময় বিধি ব্যবহার করা হয়েছে

$$\boxed{\therefore\ \ (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$$

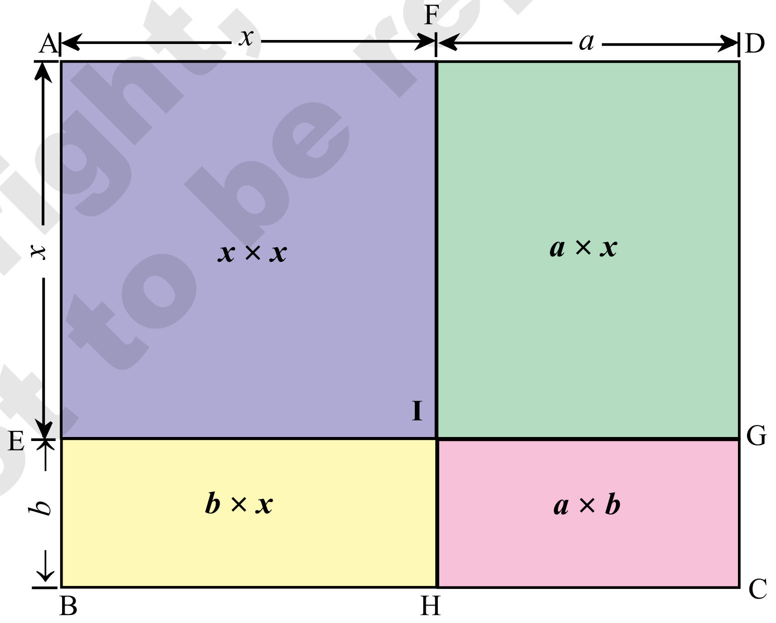
এই উক্তিটির বাঁদিকে ও ডানদিকে x -এর যে কোনো মানের জন্য সমান। অর্থাৎ x-এর যেকোনো মানের জন্য পূর্বের সমতাটি সত্য। তাই একটি $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ অভেদ।

এই অভেদকে আমরা জ্যামিতিকভাবে নিরূপণ করতে পারি। দৈর্ঘ্য $(x + a)$ এবং প্রস্থ $(x + b)$ বিশিষ্ট একটি আয়ত ABCD অঙ্কন করা হ'ল (চিত্র-1)। [তোমরা $x = 5$ সেমি, $a = 4$ সেমি, $b = 2$ সেমি ইত্যাদি মান নিতে পারো।]



চিত্র-1

তারপর ABCD আয়তকে চিত্র-2 এ দেখানোর মত করে চারটি ভাগে ভাগ করা হল।



চিত্র-2

ABCD আয়তের কালি = AEIF বর্গের কালি + FIGD আয়তের কালি + EBHI আয়তের কালি + IHCG আয়তের কালি

বা, $(x + a) \times (x + b) = x \times x + a \times x + b \times x + a \times b$

অথবা, $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

কার্য ঃ তোমরা x, a ও b -র মান আলাদা আলাদা করে নিয়ে $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ অভেদটির জ্যামিতিকভাবে নিরূপণ

উদাহরণ 13 ঃ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ অভেদটি ব্যবহার করে গুণফল বের করো

(i) $(2x + 3)(2x + 7)$

(ii) $(x + 8)(x - 5)$

(iii) $(3x^2 - 5)(3x^2 + 6)$

(iv) $(p^2 - 15)(p^2 - 10)$

(v) 102×97

সমাধান ঃ (i) $(2x + 3)(2x + 7) = (2x)^2 + (3 + 7)2x + 3 \times 7$

$= 4x^2 + 10 \times 2x + 21$

$= 4x^2 + 20x + 21$

(ii) $(x + 8)(x - 5) = (x + 8)\{x + (-5)\}$

$= x^2 + \{8 + (-5)\}x + 8 \times (-5)$

$= x^2 + (8 - 5)x - 40$

$= x^2 + 3x - 40$

(iii) $(3x^2 - 5)(3x^2 + 6) = \{3x^2 + (-5)\}(3x^2 + 6)$

$= (3x^2)^2 + \{(-5) + 6\} \times 3x^2 + (-5) \times 6$

$= 9x^4 + (6 - 5)3x^2 - 30$

$= 9x^4 + 3x^2 - 30$

(iv) $(p^2 - 15)(p^2 - 10) = (p^2)^2 + \{(-15) + (-10)\} \times p^2 + (-15) \times (-10)$

$= p^4 + (-15 - 10)p^2 + 150$

$= p^4 - 25p^2 + 150$

(v) $102 \times 97 = (100 + 2) \times (100 - 3)$

$= (100)^2 + \{2 + (-3)\} \times 100 + 2 \times (-3)$

$= 10000 + (-1) \times 100 - 6$

$= 10000 - 106$

$= 9894$

9.2.2 এখন আমরা যেকোনো **একটি দ্বিপদ রাশি $(a + b)$ র বর্গের** মান বের করি এসো।

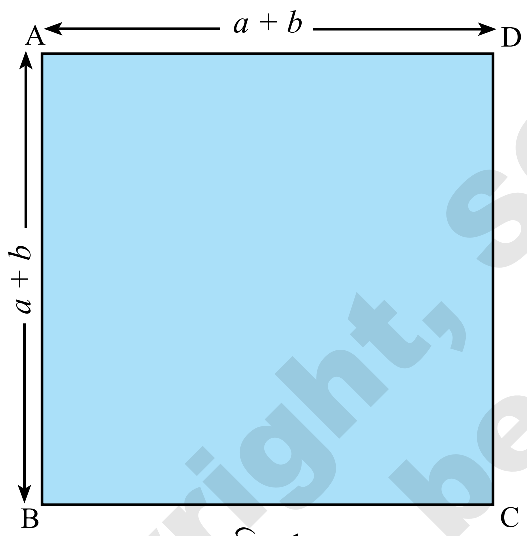
$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\times(a+b)\\ &= a(a+b)+b(a+b)\\ &= a^2+ab+ba+b^2 && [\because\ a^2 = a\times a;\ b^2 = b\times b]\\ &= a^2+ab+ab+b^2 && [\text{ক্রম বিনিময় বিধিমতে } ab = ba]\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

অতএব $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

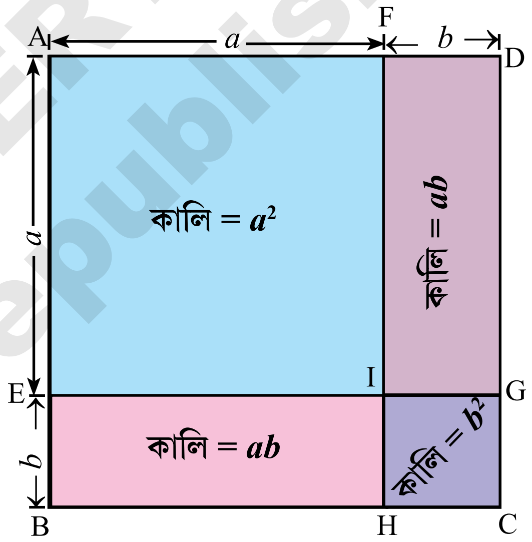
বা, **(প্রথম পদ + দ্বিতীয় পদ)^2 = (প্রথম পদ)^2 + 2 × (প্রথম পদ) × (দ্বিতীয় পদ) + (দ্বিতীয় পদ)^2**

যেহেতু বাঁদিকের দ্বিপদ রাশি দুটির প্রকৃত গুণ করে ডানদিকের রাশিটি পাওয়া গেছে, অতএব এটি একটি অভেদ। এই সমতাটি a ও bর যে কোনো মানের জন্য সত্য।

এই অভেদটি জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে নিরূপণ করতে চিত্র-1এ দেখানো ধরণে $(a + b)$ একক দৈর্ঘ্যর একটি বর্গ ABCD বর্গকে চারটি ভাগে ভাগ করা হল।



চিত্র-1



চিত্র-2

ABCD বর্গের কালি = AEIF বর্গের কালি + EBHI আয়তের কালি + FIGD আয়তের কালি + IHCG বর্গের কালি

অর্থাৎ $(a + b) \times (a + b) = a \times a + b \times a + a \times b + b \times b$

বা $(a + b)^2 = a^2 + ba + ab + b^2$

বা $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$ $[\because\ ab = ba]$

বা $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

উদাহরণ 14 ঃ অভেদ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ব্যবহার করে গুণফল বের করো ঃ

(i) 203^2 (ii) $(3p+5)^2$ (iii) $(7x^2+2y)^2$

সমাধান ঃ

(i) $203^2 = (200+3)^2$
$= (200)^2 + 2 \times 200 \times 3 + 3^2$
$= 40000 + 1200 + 9$
$= 41209$

(ii) $(3p+5)^2 = (3p)^2 + 2 \times 3p \times 5 + 5^2$
$= 9p^2 + 30p + 25$

(iii) $(7x^2+2y)^2 = (7x^2)^2 + 2 \times 7x^2 \times 2y + (2y)^2$
$= 49x^4 + 28x^2y + 4y^2$

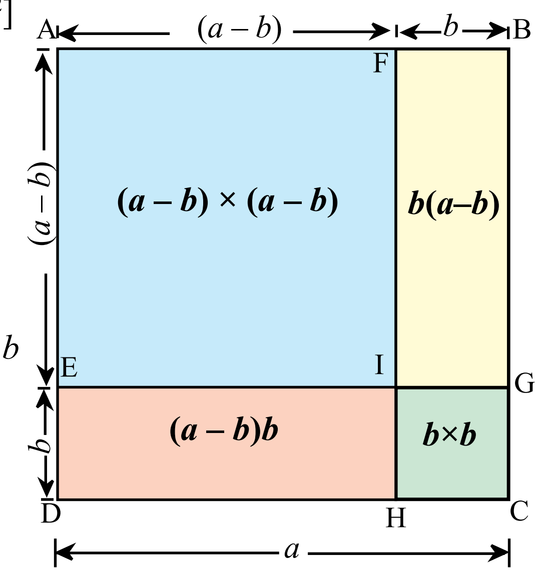
9.2.3 এইবার আমরা যেকোনো **একটি দ্বিপদ রাশি $(a-b)$-র বর্গের** মান বের করি এসো

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b) \times (a-b)\\ &= a(a-b) - b(a-b)\\ &= a^2 - ab - ba + b^2\\ &= a^2 - ab - ab + b^2 \qquad [\because ab = ba]\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

অতএব $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

অর্থাৎ **(প্রথম পদ – দ্বিতীয় পদ)^2 = (প্রথম পদ)^2 – 2 × (প্রথম পদ) × (দ্বিতীয় পদ) + (দ্বিতীয় পদ)^2**

এই অভেদের জ্যামিতিক নিরূপণের জন্য a বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গ ABCD অঙ্কন করা হয়েছে। এই বড় বর্গটিকে এবার দুটি ছোট বর্গ [কালি ক্রমে $(a-b)^2$ এবং b^2] এবং দুটি আয়ত (প্রত্যেকটিতে কালি $b(a-b)$তে ভাগ করা হল। নীচের চিত্রে তা দেখানো হয়েছে।



ABCD বর্গের কালি = AEIF বর্গের কালি
+ FIGB আয়তের কালি
+ EDHI আয়তের কালি
+ IHCG বর্গের কালি

বা $a \times a = (a-b)(a-b) + b(a-b) + (a-b)b + b \times b$

বা $a^2 = (a-b)^2 + ba - b^2 + ab - b^2 + b^2$

বা $a^2 = (a-b)^2 + ab + ab - b^2 - b^2 + b^2$

বা $a^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2$

বা $(a-b)^2 + 2ab - b^2 = a^2$

বা $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

উদাহরণ 15 ঃ অভেদ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ব্যবহার করে গুণফল বের করো ঃ

(i) 498^2 (ii) $(7a+2b)^2$ (iii) $\left(\frac{2}{3}x^2 - 5\right)^2$

সমাধান ঃ (i) 498^2

$$= (500-2)^2$$
$$= (500)^2 - 2 \times 500 \times 2 + 2^2$$
$$= 250000 - 2000 + 4$$
$$= 248000 + 4$$
$$= 248004$$

(ii) $(7a-2b)^2$

$$= (7a)^2 - 2 \times 7a \times 2b + (2b)^2$$
$$= 49a^2 - 28ab + 4b^2$$

(iii) $\left(\frac{2}{3}x^2 - 5\right)^2$

$$= \left(\frac{2}{3}x^2\right)^2 - 2 \times \frac{2}{3}x^2 \times 5 + 5^2$$
$$= \frac{4}{9}x^4 - \frac{2 \times 2 \times 5}{3}x^2 + 25$$
$$= \frac{4}{9}x^4 - \frac{20}{3}x^2 + 25$$

9.2.4 দ্বিপদ রাশি $(a+b)$ কে দ্বিপদ রাশি $(a-b)$ রাশি দিয়ে গুণ করি এসো --

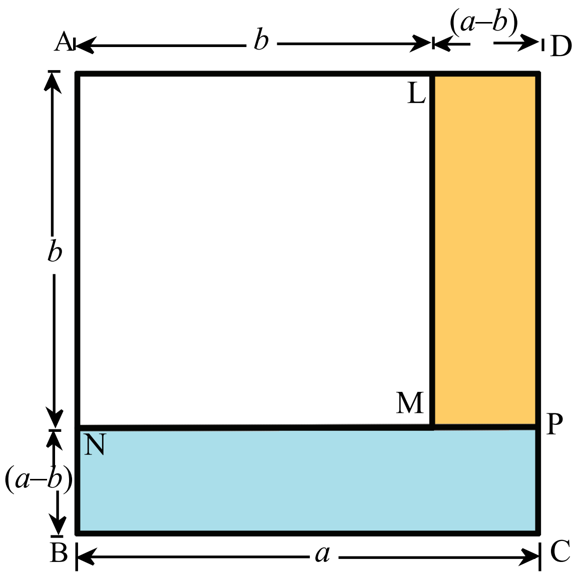
$$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b)$$
$$= a^2 - ab + ba - b^2$$
$$= a^2 - ab + ab - b^2 \quad [\because ab = ba]$$
$$= a^2 - b^2$$

অর্থাৎ $\boxed{\mathbf{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}}$

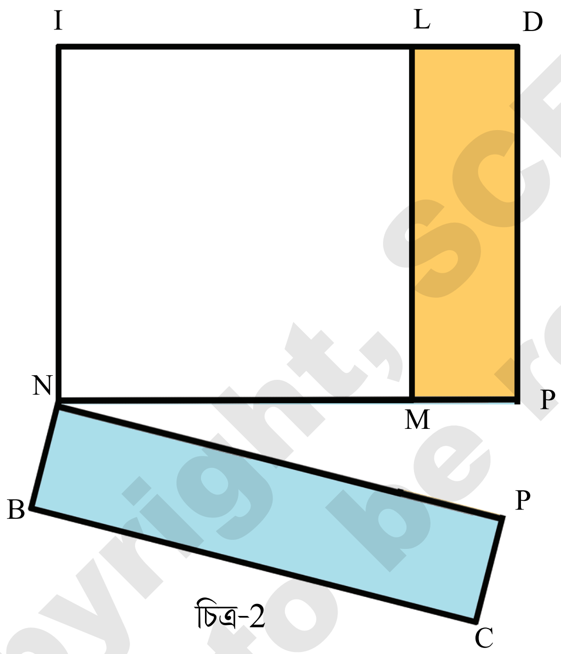
ঠিক তেমনি, $\boxed{\mathbf{(a+b)(b-a) = b^2 - a^2}}$

অর্থাৎ **(প্রথম পদ + দ্বিতীয় পদ) × (প্রথম পদ – দ্বিতীয় পদ) = (প্রথম পদ)^2 – (দ্বিতীয় পদ)^2**

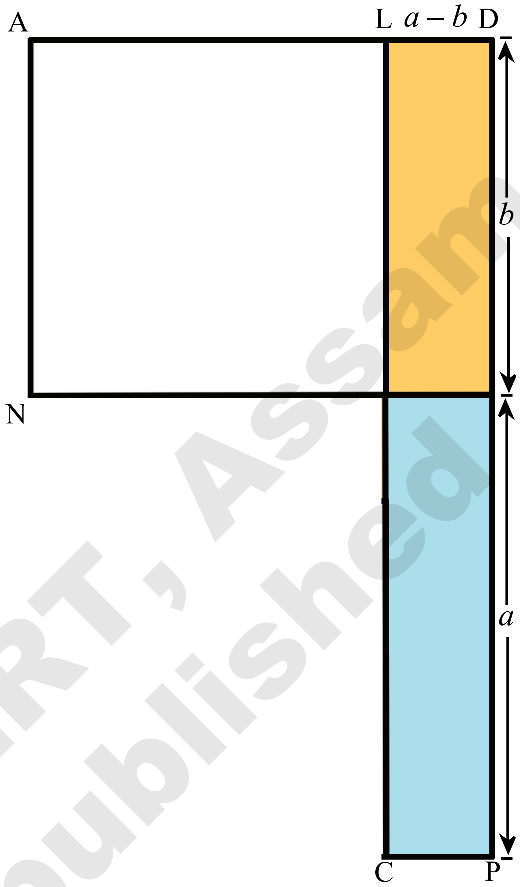
এই অভেদটিকে জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে নিরূপণ করা যায়। a বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গ ABCD অঙ্কন করা হল। চিত্র-1এ দেখান ধরণে ABCDর ওপর অন্য একটি বর্গ ALMN অঙ্কন করা হল যাতে AN = AL = b, $(b < a)$ হয়।



চিত্র-1



চিত্র-2



চিত্র-3

এখানে চিত্র-2ত দেখানর মত ABCD বর্গের থেকে NBCP আয়তটি পৃথক করে নীচের চিত্র-3 অনুযায়ী LMPD আয়তের MP -র দিকে NBCP আয়তের BN দিকটি যোগ করা হল।

চিত্র-3এ রং করা অংশের কালি

= LCPD আয়তের কালি

= LD × DP

$= (a - b)\,(a + b)$

$= (a + b)\,(a - b)$

অন্যদিকে, চিত্র-1র থেকে আমরা পাই

রং করা অংশের কালি $= ABCD$ বর্গের কালি $-$ $ANML$ বর্গের কালি

$= a \times a - b \times b$

$= a^2 - b^2$

যেহেতু রঞ্জিত অংশের কালি সবগুলো চিত্রেই সমান।

$\therefore \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

উদাহরণ 16 ঃ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ওপরের অভেদটি ব্যবহার করে গুণফল বের করো ঃ

(i) 102×98 (ii) $(x + 2y)(x - 2y)$ (iii) $(11xy + 3x)(11xy - 3x)$

সমাধান ঃ

(i) $102 \times 98 = (100 + 2) \times (100 - 2)$
$= (100)^2 - 2^2$
$= 10000 - 4$
$= 9996$

(ii) $(x + 2y)(x - 2y) = x^2 - (2y)^2$
$= x^2 - 4y^2$

(iii) $(11xy + 3x)(11xy - 3x) = (11xy)^2 - (3x)^2$
$= 121x^2y^2 - 9x^2$

বীজগণিতে সঘন ব্যবহার করা অভেদসমূহ হল

1. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
4. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

অনুশীলনী 9.2

1. অভেদ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ব্যবহার করে নীচের রাশিগুলো গুণ করো।

(i) $(x + 7)(x + 5)$ (ii) $(7x + 2y)(7x + 6y)$

(iii) $(4x^3 + 8)(4x^3 + 10)$ (iv) $(4k^2 - 3k)(4k^2 - 7k)$

(v) $\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{4}\right)$ (vi) $\left(\frac{n^2}{5}-0.6\right)\left(\frac{n^2}{5}+1.6\right)$

(vii) 98×97 (viii) 501×503

2. অভেদ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ব্যবহার করে নীচের বর্গগুলোর মান বের করো ঃ

(i) $(x + 5)^2$ (ii) $(5x + 4y)^2$ (iii) $(3a^3 + 4a^2)^2$

(iv) $\left(3x+\dfrac{1}{3x}\right)^2$ (v) $\left(\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}\right)^2$ (vi) 502^2

(vii) $(9.5)^2$ (viii) $\left(4\dfrac{1}{8}\right)^2$

3. অভেদ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ব্যবহার করে নীচের বর্গগুলোর মান বের করো ঃ

(i) $(x - 7)^2$ (ii) $(6x - 5)^2$ (iii) $(10x^2 - 3y)^2$

(iv) $(p^2 - q^2)^2$ (v) $(a^2x - ax^2)^2$ (vi) $\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)^2$

(vii) 296^2 (viii) 1999^2

4. অভেদ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ব্যবহার করে নীচের রাশিগুলো গুণ করো ঃ

(i) $(y + 11)(y - 11)$ (ii) $(2x + 3)(2x - 3)$

(iii) $(6 + m^2)(m^2 - 6)$ (iv) $(ax^2 - by)(ax^2 + by)$

(v) $(1 - x^m)(1 + x^m)$ (vi) 61×59

(vii) 106×94 (viii) 9.5×8.5

5. উপযুক্ত অভেদ ব্যবহার করে নীচের রাশিগুলোর গুণফল বের করো ঃ

(i) $(3x - 5m)(3x - 5m)$ (ii) $(4m + 3)(4m + 2)$

(iii) $(9 + 4n)^2$ (iv) $\left(6x+\dfrac{1}{3}\right)(6x + 3)$

(v) $(4ab - c)(4ab + c)$ (vi) $\left(x-\dfrac{x}{2}\right)^2$

(vii) $\left(\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{4}\right)\left(\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{4}\right)$ (viii) $(0.5x^2 - 0.2y^2)^2$

(ix) $(-9x^2 + y^3)(9x^2 + y^3)$ (x) $\left(\dfrac{y^2}{2}-4\right)\left(\dfrac{y^2}{2}+6\right)$

(xi) $\left(7x^2+\dfrac{1}{3}\right)^2$ (xii) $(x + y + z)(x + y - z)$

(xiii) 1002×999 (xiv) $(10.2)^2$

(xv) 79^2 (xvi) 6.2×5.8

6. সরল করো ঃ

(i) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(2x+\frac{1}{x}\right)$

(ii) $(2l + m)^2 - (2l - m)^2$

(iii) $(a^2b + ab^2)^2 - 6a^3b^3$

(iv) $(x + y)(x - y) + (y + z)(y - z) + (z + x)(z - x)$

(v) $(5a - 6b)^2 + 20ab - (6b + 5a)^2$

(vi) $(4p^2 + 5q^2)(4p^2 - 5q^2) + (2p^2 - 5q^2)^2$

(vii) $(2x - 5)(2x + 3) - (x - 2)^2 + 29$

(viii) $\left(\frac{x}{3}-\frac{3y}{4}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{3y}{4}\right)+\left(\frac{3y}{4}+3x\right)\left(\frac{3y}{4}+x\right)$

(ix) $\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{5}\right)^2+2\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{5}\right)+\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{5}\right)^2$

(x) $2.89 \times 2.89 + 0.22 \times 2.89 + 0.0121$

(xi) $\frac{0.25-2\times0.5\times3.5+12.25}{3}$

(xii) $\frac{4.68\times4.68-3.32\times3.32}{1.36}$

7. দেখাও যে

(i) $(a - b + c - d)^2 - (a + b - c + d)^2 + 4a(b + d) = 4ca$

(ii) $(1.5x^2 + 1.2y)^2 - (1.5x^2 - 1.2y)^2 = 7.2x^2y$

(iii) $\left(\frac{2}{3}x^2+5\right)^2-25=\frac{4}{9}x^4+\frac{20}{3}x^2$

(iv) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) + (b^2 + c^2)(b^2 - c^2) + 2c^2(c^2 - a^2) = (c^2 - a^2)^2$

8. উপযুক্ত অভেদ ব্যবহার করে নীচের সমস্যাগুলো সমাধান করো—

(i) একটি আয়তাকৃতি খেলার মাঠের দৈর্ঘ্য $(x + 8)$ মিটার, প্রস্থ দৈর্ঘ্যের থেকে 3 মিটার কম। খেলার মাঠটির কালি বের করো।

(ii) একটি বর্গাকৃতি বাগানের দৈর্ঘ্য $\left(2x+\frac{1}{4}\right)$ মিটার। বাগানটির কালি নির্ণয় করো।

(iii) একজন কৃষক তাঁর কৃষিভূমির দুটুকরো বর্গাকৃতির জমিতে জোহা ধান ও বোরো ধানের চাষ করলেন। জোহা ধানের চাষ করা জমিটুকুর দৈর্ঘ্য বোরো ধানের জমিটুকু থেকে 5 মিটার বেশি। দুটুকরো জমির কালির পার্থক্য বের করো।

(iv) যদি 1 বর্গমিটার বেড়ায় রং করতে 9.00 টাকা খরচ হয়, তাহলে 107 মিটার দৈর্ঘ্য ও 93 মিটার প্রস্থর বেড়ায় রং করতে কত টাকার প্রয়োজন হবে?

(v) 197 মিটার দৈর্ঘ্যের বর্গাকৃতি একটি মাঠের কালি বের করো।

(vi) $x+\frac{1}{x}=3$ হলে $x^2+\frac{1}{x^2}$ এবং $x^4+\frac{1}{x^4}$ র মান নির্ণয় করো।

(vii) $2x-\frac{1}{2x}=2$ হলে $4x^2+\frac{1}{4x^2}$ এবং $16x^4-\frac{1}{16x^4}$ র মান নির্ণয় করো।

(viii) $a-b=10$ এবং $ab=11$ হলে, $a+b$ র মান নির্ণয় করো।

আমরা কী কী শিখলাম?

1. দুটি বা ততোধিক বীজগণিতীয় রাশির গুণের ক্ষেত্রে গুণফলের সাংখ্যিক সহগ = রাশিগুলোর সাংখ্যিক সহগের গুণফল।

2. কয়েকটি অতি প্রয়োজনীয় অভেদ

   (i) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

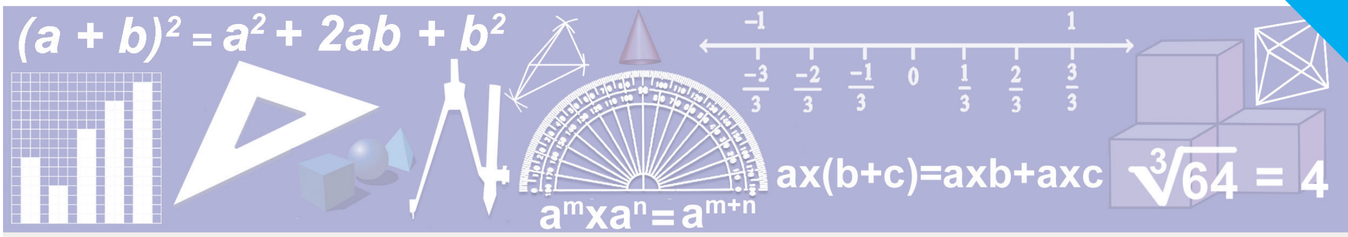
   (ii) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

   (iii) $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

   (iv) $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

   এই অভেদগুলো জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

❑❑❑



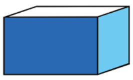
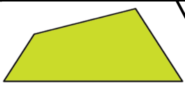
অধ্যায়-10

গোটা আকৃতির দৃশ্যায়ন
(Visualization of Solid Figures)

R4V6D5

সপ্তম শ্রেণিতে তোমরা কিছু সামতলিক ও গোটা আকৃতির সঙ্গে পরিচিত হয়েছিলে। ত্রিভুজ, বৃত্ত, বর্গ, আয়ত, চতুর্ভুজ ইত্যাদি সামতলিক আকৃতির কিছু উদাহরণ দেওয়া হয়েছে। তেমনি ঘনক, আয়তীয় ঘনক, চোঙা, শঙ্কু, পিরামিড, প্রিজম ইত্যাদি গোটা আকৃতির উদাহরণ। সামতলিক আকৃতিগুলোকে দ্বিমাত্রিক (Two Dimensional বা সংক্ষেপে 2D) আকৃতি বলা হয়। আবার গোটা বস্তুর তিনটি মাত্রা আছে। তাই, তেমন আকৃতিগুলোকে ত্রি-মাত্রিক (Three Dimensional বা সংক্ষেপে 3D) আকৃতি বলা হয়। তোমরা ত্রিমাত্রিক আকৃতি যেভাবে স্থান অধিকার করে থাকে এবং এই আকৃতিগুলো ভিন্ন ভিন্ন অবস্থান সাপেক্ষে যে বিভিন্ন দেখায় এই বিষয়ে জেনেছ।

কার্য নীচের আকৃতিগুলোর ছবির সঙ্গে আকৃতির নাম ও মাত্রা মেলাও

আকৃতির চিত্র	আকৃতির নাম	আকৃতির মাত্রা
	বর্গ (Square)	ত্রিমাত্রিক
	শঙ্কু (Cone)	ত্রিমাত্রিক
	চোঙা (Cylinder)	দ্বিমাত্রিক
	আয়তীয় ঘনক (Cuboid)	ত্রিমাত্রিক
	চতুর্ভুজ (Quadrilateral)	দ্বিমাত্রিক
	গোলক (Sphere)	ত্রিমাত্রিক

ওপরের তালিকাটি মিলিয়ে তোমরা বুঝতে পারলে যে ওপরের আকৃতিগুলির কিছু দ্বিমাত্রিক আর কিছু ত্রিমাত্রিক।

10.1 ত্রিমাত্রিক আকৃতি ভিন্ন ভিন্ন অবস্থান থেকে দেখা দৃশ্য (View of three dimensional figure from different positions) :

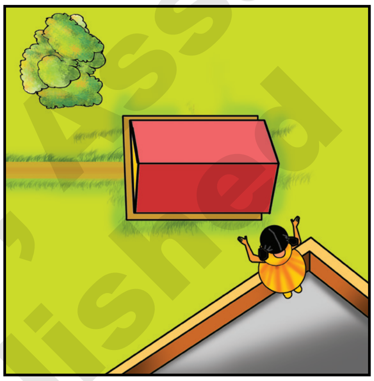
ইতিমধ্যে আগের শ্রেণিতে তোমরা ত্রিমাত্রিক আকৃতিগুলো ভিন্ন ভিন্ন অবস্থানের থেকে যে ভিন্নভাবে দেখা যায় তা পেয়ে এসেছ। উদাহরণস্বরূপ একটি ঘনক ওপর থেকে বা পাশ থেকে দেখলে যে ভিন্ন ভাবে দেখা যায় তা শিখেছ। এই আকৃতিগুলোর বিভিন্ন অবস্থানের ত্রিমাত্রিক রূপে চিত্র আঁকা যায়। উদাহরণস্বরূপ, চিত্র 1, 2 এবং 3 লক্ষ করো। চিত্র 1 একটি বাড়ির সামনের থেকে দেখা দৃশ্য, চিত্র 2 একটি বাড়ির সামনের থেকে দেখা দৃশ্য বা পাশের দৃশ্য এবং চিত্র 3 একটি বাড়ির ওপর থেকে দেখা দৃশ্য। প্রত্যেক বারই পর্যবেক্ষক ভিন্ন অবস্থান থেকে ভিন্ন দৃশ্য দেখছেন। তাই নয় কী?

সামনের দৃশ্য (Front view)

চিত্র 1

পার্শ্ব দৃশ্য (Side view)

চিত্র 2



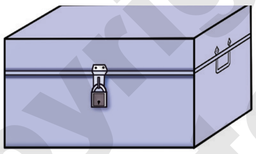
ওপরের দৃশ্য (Top view)

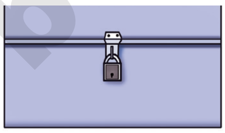
চিত্র 3

অনুশীলনী 10.1

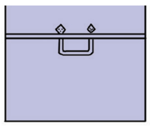
1. নীচে কিছু ত্রিমাত্রিক জিনিসের ছবি দেওয়া হয়েছে। ছবিগুলোর সামনের, ওপরের এবং পার্শ্বদৃশ্যগুলো দেওয়া রয়েছে। প্রতিটি বস্তুর অনুরূপ সম্মুখ, ওপর এবং পার্শ্ব দৃশ্যগুলো শনাক্ত করো।

(a) বাক্স





(i)



(ii)

(iii)

(b) আলমারি

(i)

(ii)

(iii)

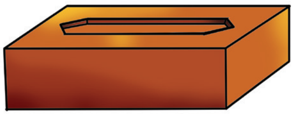
(c) একটি বই

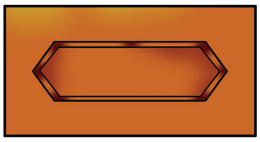
(i)

(ii)

(iii)

(d) ইট





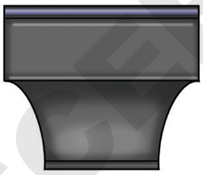
(i)

(ii)

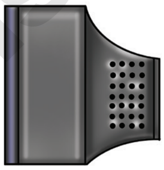
(iii)

(e) টিভি

(i)

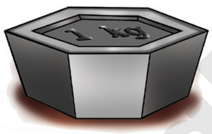


(ii)



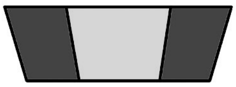
(iii)

(f) বাটখারা



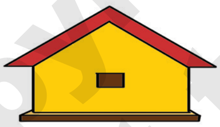
(i)

(ii)



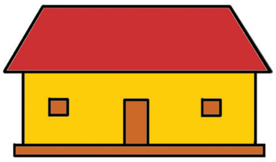
(iii)

(g) বাড়ি

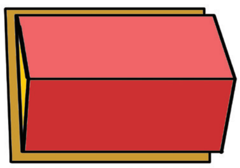


(i)

(ii)



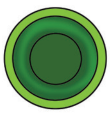
(iii)



(iv)

(h) ডাষ্টবিন

(i)



(ii)

কার্য নীচের উল্লেখ করা বস্তুগুলোর অনুরূপ সম্মুখের দৃশ্য, পাশের দৃশ্য এবং ওপরের দৃশ্যসমূহ দলের সঙ্গে আলোচনা করে আঁকো।

(i) একটি চকের বাক্স

(ii) তোমাদের বিদ্যালয়ের আলমারি

(iii) বিদ্যালয় গৃহ

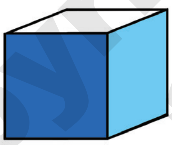
(iv) শ্রেণিকক্ষের টেবিল, ডেস্ক-বেঞ্চ

10.2 তল বা পৃষ্ঠ, কোণ ও শীর্ষবিন্দু (Faces, Edges and Vertices)

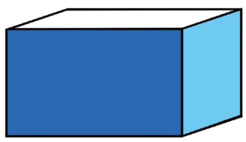
ব্যবহারিক জীবনে আমরা অনেক আস্ত জিনিস দেখে এসেছি। লঘু পানীয়ের বোতল লুডোর ডাইস, ইট, গেলাস ইত্যাদি জিনিসগুলোর কিছু জিনিসের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা আছে। প্রত্যেকটি গোটা জিনিসই স্থান অধিকার করে।

কার্য ঘনক, আয়তীয় ঘনক, চোঙা, গোলক ইত্যাদি ত্রিমাত্রিক আকৃতির জিনিসগুলো পর্যবেক্ষণ করো। অনুসন্ধান ও আলোচনার মাধ্যমে শীর্ষবিন্দু, তল বা পৃষ্ঠ এবং পাশের সংখ্যা গণনা করো। তোমরা গণনা করে পাওয়া তল, পার্শ্ব ও শীর্ষবিন্দুর সংখ্যা নীচের তালিকায় দেওয়া সংখ্যার সঙ্গে মিলিয়ে দেখো। মিলেছে কী?

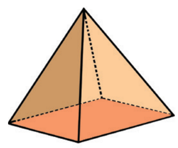
গোটা জিনিস	শীর্ষ বিন্দু	তল বা পৃষ্ঠ	পার্শ্ব
ঘনক	8	6	12
আয়তীয় ঘনক	8	6	12
চোঙা	0	2 টি সমতল 1 টি বক্রতল	2
গোলক	0	1 টি বক্রতল	0
শঙ্কু	1	1 টি সমতল 1 টি বক্রতল	1



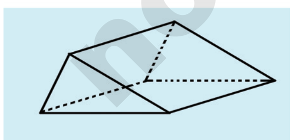
ঘনক



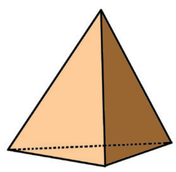
আয়তীয় ঘনক



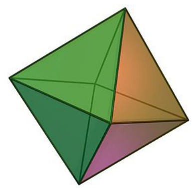
বর্গভূমির পিরামিড



ত্রিভুজাকৃতির প্রিজম



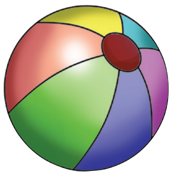
ত্রিভুজভূমির পিরামিড



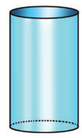
অষ্টফলক

আগের পৃষ্ঠার গোটা জিনিসগুলো লক্ষ্য করো। এই বিশেষ ধরণের গোটা বস্তুগুলো বহুভুজীয় ক্ষেত্রের দ্বারা গঠিত, যাকে তল বলা হয়। এর পার্শ্ব সোজা থাকে। এইধরনের গোটা জিনিসকে বহুতল বিশিষ্ট ঘনক্ষেত্র বা বহুফলক (Polyhedron) বলা হয়। Polyhedron শব্দটি গ্রিক শব্দ। Poly -এর অর্থ অনেক। Hedron -এর অর্থ ভূমি বা বসার আসন। একটি বহুফলকের 3টা বা তার থেকে বেশি সোজা পার্শ্ব থাকে এবং এর পাশগুলো একটি বিন্দুতে মিলিত হয় থাকে শীর্ষবিন্দু বলা হয়।

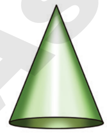
এইখানেই একটি প্রশ্ন হয়, সকল গোটা জিনিসই বহুফলক হয় কি? নীচে দেওয়া গোটা জিনিসগুলোর চিত্রগুলো লক্ষ করো।



গোলক (Sphere)
চিত্র (1)



চোঙা (Cylinder)
চিত্র (2)



শঙ্কু (Cone)
চিত্র (3)

চিত্র (1) গোলকের চিত্র— গোলকের একটি বক্র তল থাকে। এর পাশ বা শীর্ষ বিন্দু নেই।

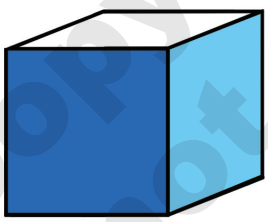
চিত্র (2) চোঙার চিত্র — চোঙার একটি বক্র পার্শ্বতল আছে। এর সোজা পার্শ্ব নেই।

চিত্র (3) শঙ্কুর চিত্র — শঙ্কুর একটি বক্র পার্শ্বতল আছে। এর সোজা পাশ নেই। একটি শীর্ষবিন্দু ও একটি বৃত্তাকৃতির সমতল থাকে।

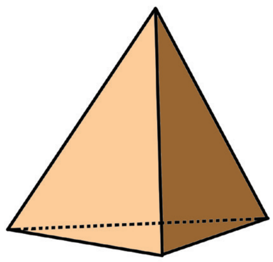
কী লক্ষ্য করলে? এগুলো বহুফলক নয়। কেন? কারণ এগুলোর তলগুলো সমতল নয়, ভূমি বহুভুজ নয় আর সোজা পার্শ্ব নেই।

এই বহুফলকগুলো নিয়মিত (Regular) ও অনিয়মিত (Irregular) আকৃতির থাকে।

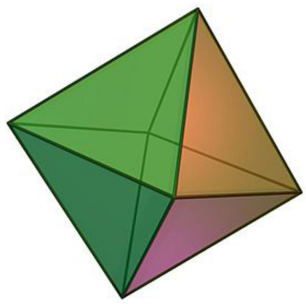
নিয়মিত বা সুষম বহুফলকের তলগুলো সর্বাংগসম বহুভুজ এবং একই সংখ্যক তলের দ্বারা শীর্ষবিন্দু গঠিত হয়। এবার তলের চিত্র তিনটি লক্ষ্য করো।



ঘনক (Cube)
চিত্র (A)



সুষম চতুঃফলক
(Regular Tetrahedron)
চিত্র (B)

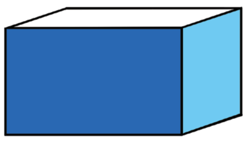


সুষম অষ্টফলক
(Regular Octahedron)
চিত্র (C)

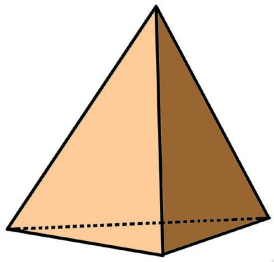
চিত্র (A) ঃ ঘনকের চিত্র — ঘনকে তিনটি সর্বসম তলের দ্বারা শীর্ষবিন্দু গঠিত হয়েছে।
চিত্র (B) ঃ সুষম চতুঃফলক (Tetrahedron)-এ চারটি সর্বসম তলের দ্বারা শীর্ষবিন্দু গঠিত হয়েছে।
চিত্র (C)ঃ সুষম অষ্টফলকে (Octahedron) আঠটি সর্বসম তলের দ্বারা শীর্ষবিন্দু গঠিত হয়েছে।

অন্যদিকে অনিয়মিত বহুফলকগুলোর তলগুলো সর্বসম নয়।

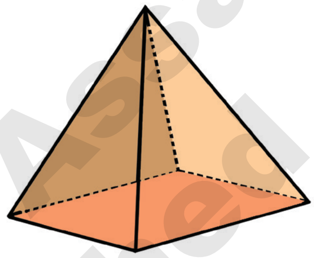
উদাহরণস্বরূপ, আয়তীয় ঘনক অনিয়মিত বহুফলকের একটি উদাহরণ। কেননা এর সবগুলো তল সমান নয়। নীচে কয়েকটি অনিয়মিত বহুফলকের চিত্র দেওয়া হলো।



আয়তীয় ঘনক
(Cuboid)



ত্রিভুজাকৃতি ভূমির পিরামিড
(Pyramid with triangular base)



বর্গাকৃতি ভূমির পিরামিড
(Pyramid with square base)

প্রিজম ও পিরামিড বহুফলক পরিবারের গুরুত্বপূর্ণ সদস্য হিসাবে ধরা হয়।

প্রিজম কয়েক প্রকারের— বর্গভূমির প্রিজম, ত্রিভুজাকৃত ভূমির প্রিজম, পঞ্চভুজাকৃতি ভূমির পিরামিড ইত্যাদি।

সেভাবে পিরামিডও বহু প্রকারের, যেমন— বর্গাকৃতি ভূমির পিরামিড, ত্রিভুজাকৃতি ভূমির পিরামিড ইত্যাদি।

নীচের তালিকাতে বহুফলকগুলোর তল, পার্শ্ব এবং শীর্ষবিন্দুর সংখ্যা লেখো। F, V ও E যথাক্রমে তল, শীর্ষবিন্দু এবং পাশের সংখ্যা বুঝিয়েছে। (প্রথমটি তোমাদের জন্য করে দেওয়া হয়েছে)

বহুফলক	**F**	**V**	**E**	**F+V**	**E +2**
ঘনক	6	8	12	14	14
আয়তীয় ঘনক					
বর্গাকৃতি ভূমির পিরামিড					
বর্গাকৃতি ভূমির প্রিজম					
ত্রিভুজাকৃতি ভূমির প্রিজম					
ত্রিভুজাকৃতি ভূমির পিরামিড					

তালিকাটি পূর্ণ করে তোমরা কী পেলে?

প্রত্যিকটি বহুফলকের জন্য তালিকাটির শেষের দুটি স্তম্ভে থাকা F +V ও E + 2 -এর মান গুলি একই।

পূর্বের সম্বন্ধটি আমরা এভাবে লিখতে পারি

$$F + V - E = 2$$

এই সম্বন্ধটি ইউলার (Euler) নামের একজন গণিতজ্ঞ উদ্ভাবন করেছিলেন। অতএব এই সম্বন্ধটিকে **ইউলার সূত্র** বলা হয়। এই সূত্রটি যেকোনো বহুফলকের জন্য সত্য।

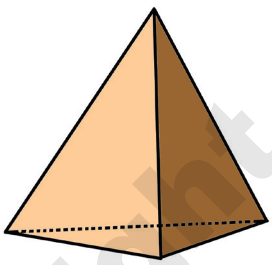
Leonhard Euler
(1707-1783)

চেষ্টা করো

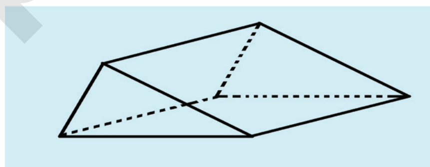
- একটি ঘনক নাও। এর একটি কোণ কাটলে উৎপাদিত আকৃতিটির F, V ও E-র মান কত হবে দলবদ্ধভাবে নির্ণয় করো। ইউলার সূত্র পরীক্ষা করো।
- একটি বর্গাকৃতির প্রিজম, ঘনকের সঙ্গে কোনো ক্ষেত্রে এক হয় কি? হাতে-কলমে আলোচনা করে দেখাও।

অনুশীলনী 10.2

1. একটি বহুফলকের শীর্ষবিন্দু ও তলের সংখ্যা ক্রমে 12 ও 20 হলে পার্শ্বের সংখ্যা কত হবে?
2. একটি বহুফলকের পার্শ্ব ও শীর্ষবিন্দু সংখ্যাক্রমে 12 ও 6 হলে তলের সংখ্যা নির্ণয় করো।
3. নীচের দুটি বহুফলকের জন্য অয়লার সূত্র পরীক্ষা করো।



ত্রিভুজাকৃতি ভূমির পিরামিড



বর্গাকৃতি ভূমির প্রিজম

10.3 আমাদের চারদিকে স্থানের মানচিত্র অঙ্কন (Drawing map of our sorrounding places) :

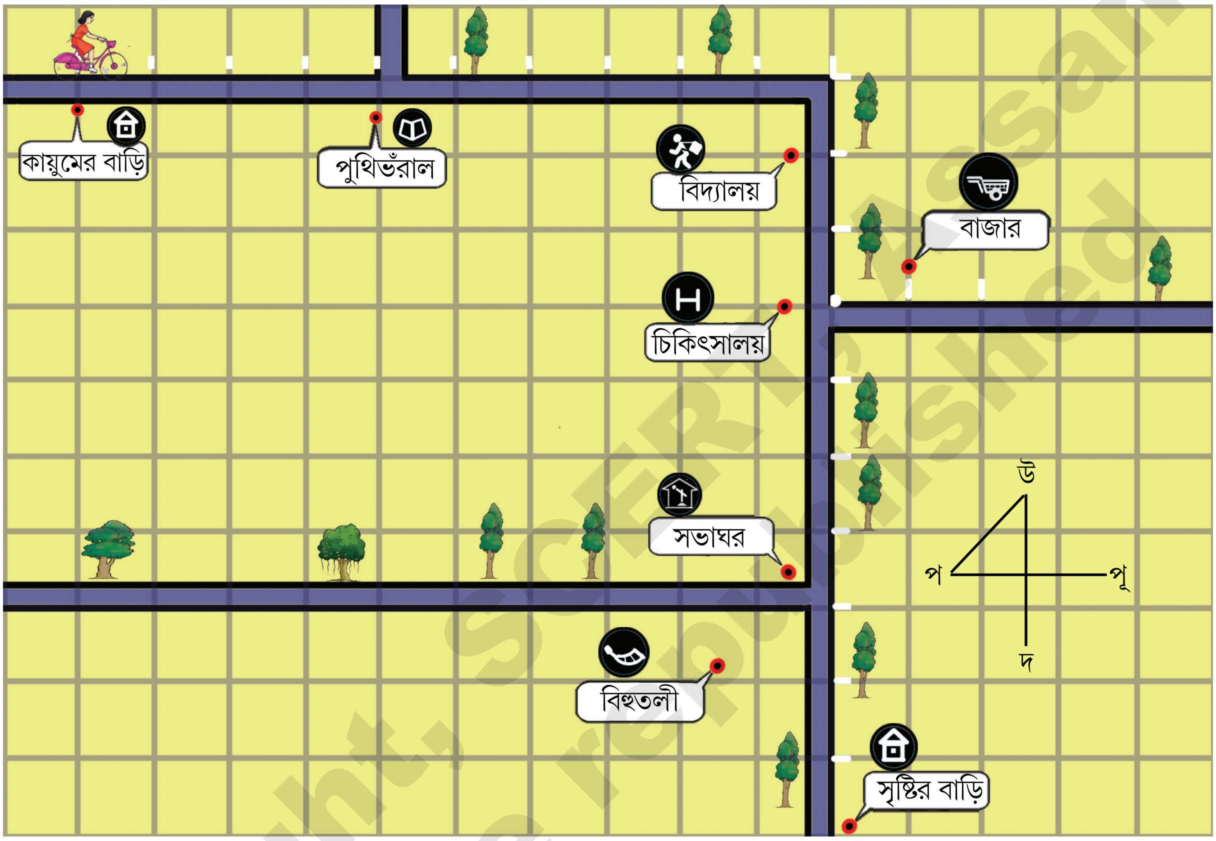
তোমরা একটি মানচিত্রের (Map)বিশেষ স্থান, নদী, বনাঞ্চল ইত্যাদির অবস্থান কীভাবে নির্ণয় করে সেবিষয়ে শিখে এসেছ। মানচিত্র একটি নির্দিষ্ট স্থানে কীভাবে যাবে, এর দূরত্ব ইত্যাদি তথ্য জানতে সাহায্য করে। মানচিত্রে স্থান, নদী, পর্বত, জলপথ, স্থলপথ ইত্যাদি দেখাতে চিহ্ন ও রঙের ব্যবহার করা হয়। উদাহরণস্বরূপ, সবুজ রং বনাঞ্চল, নীল রং জল ইত্যাদির জন্য ব্যবহার করা হয়। একটি মানচিত্র আঁকতে শুদ্ধ স্কেল ব্যবহার করতে হয়। ম্যাপে দেখানো দূরত্ব প্রকৃত দূরত্বের সমানুপাতিক হতে হয়।

এই আলোচনার থেকে আমরা মানচিত্র অঙ্কন এবং ছবি আঁকা একই বলতে পারি কি? ছবি আঁকার সময় ছবিটি বাস্তবে দেখার মতো আঁকতে চেষ্টা করো। একটি ছবি পর্যবেক্ষকের অবস্থানভেদে ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। ছবিটি পর্যবেক্ষক ওপর থেকে দেখছেন, না নীচের থেকে দেখছেন, না কি পাশ থেকে দেখছেন তার ওপর নির্ভর

করে। উদাহরণস্বরূপ আমরা একটি বাড়ির ছবি নিতে পারি।

কিন্তু মানচিত্রের ক্ষেত্রে তা প্রযোজ্য নয়। কেননা পর্যবেক্ষকের অবস্থান যেখানেই হোক না কেন মানচিত্রটি একই হবে।

নীচে দেওয়া মানচিত্রটি লক্ষ করো। মানচিত্রে কায়ুম তার ঘর থেকে বান্ধবী সৃষ্টির বাড়িতে যাওয়ার পথটি এঁকেছে। সে পথের বিভিন্ন বিশেষ স্থানগুলি দেখাতে ভিন্ন ভিন্ন চিহ্ন ব্যবহার করেছে।



চিহ্নের ব্যবহার ও দূরত্বের উল্লেখ মানচিত্রের অধ্যয়নে সহজ ও সঠিক হয়। কায়ুম মানচিত্রটি আঁকার সময় স্কেল ধরে এঁকেছে। তাই মানচিত্রের দূরত্ব উল্লেখ করতে প্রকৃত দূরত্ব জেনে নিয়েছে। কায়ুম মানচিত্রের স্কেল প্রকৃত স্কেলের সমানুপাতিকভাবে ধরেছে। ওর আঁকা মানচিত্রটিতে ম্যাপের দূরত্ব 1 সেমি = প্রকৃত দূরত্ব 100 মি।

এই মাপ বিভিন্ন মানচিত্রের জন্য বিভিন্ন।

লক্ষ করবে, দুটি মানচিত্র একই আকারের হলেও তাদের মাপ ও দূরত্ব ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, অসমের ও ভারতের মানচিত্র দুটি একই আকারের আঁকা যায়। কিন্তু দুটি মানচিত্রের স্কেলের অনুপাত আলদা আলাদা। অসমের মানচিত্রে দেখানো 1 সেমির দূরত্ব ভারতের মানচিত্রে দেখানো দূরত্ব থেকে তুলনামূলকভাবে কম হতে হবে।

কার্য

অন্বেষার মতো তোমরাও তোমাদের বাড়ি থেকে বিদ্যালয়ে আসার পথের একটি মানচিত্র অঙ্কন করো। পথের বিশেষ স্থানগুলোর জন্য চিহ্ন ও ম্যাপের স্কেল উল্লেখ করবে।

আমরা কী কী শিখলাম ?

1. যেকোনো ত্রিমাত্রিক একটি বস্তু ভিন্ন ভিন্ন অবস্থান থেকে দেখলে ভিন্ন ভিন্ন দৃশ্য দেখা যায়।
2. একটি মানচিত্রে নির্দিষ্ট বস্তু বা স্থানের অবস্থান অন্য বস্তু বা স্থানের সাপেক্ষে চিহ্নিত করে।
3. মানচিত্রে ব্যবহৃত চিহ্নগুলো ভিন্ন ভিন্ন স্থান নির্দেশ করতে ব্যবহার করা হয়।
4. একটি মানচিত্রে ব্যবহৃত চিহ্নগুলো ভিন্ন ভিন্ন স্থান নির্দেশ করতে ব্যবহার করা হয়।
5. যেকোনো বহুফলকের জন্য

   $F+V-E = 2$

   যেখানে F বহুফলকটির তল বা পিঠের, V শীর্ষবিন্দুর ও E পাশের সংখ্যা বুঝিয়েছে। এই সম্বন্ধটিকে **ইউলার সূত্র** বলা হয়।

❑❑❑

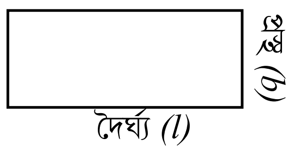
অধ্যায়-11

পরিমিতি
(Mensuration)

N7A9H2

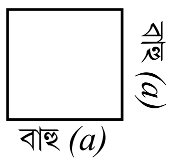
আগের শ্রেণিতে তোমরা ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের কালি নির্ণয় করতে শিখেছ। নীচের তালিকাটিতে আকৃতিগুলোর কালি মনে করি এসো —

চিত্র | **আকৃতির নাম** | **কালি নির্ণয়ের সূত্র**



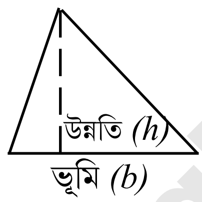
আয়ত (Rectangle)

দৈর্ঘ্য × প্রস্থ
$= (l \times b)$



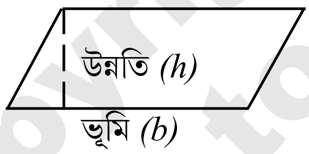
বর্গ (Square)

বাহু × বাহু
= (বাহু)^2
$= a \times a = a^2$

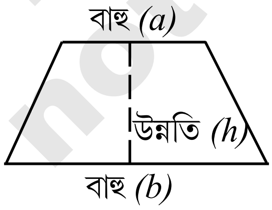


ত্রিভুজ (Traingle)

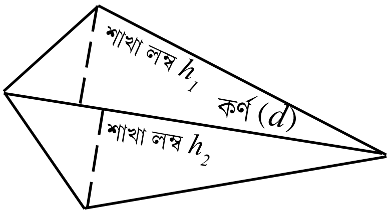
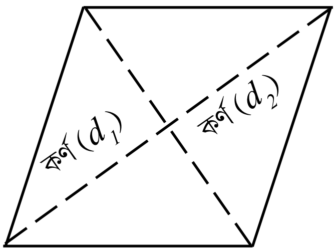
$= \frac{1}{2}$ × ভূমি × উন্নতি
$= \frac{1}{2} \times b \times h$



সামান্তরিক (Parallelogram) = ভূমি × উন্নতি
$= b \times h$



ট্র্যাপিজিয়াম (Trapezium) $= \frac{1}{2} \times (a + b)\, h$
$= \frac{1}{2}$ (সমান্তরাল বাহু দুটির সমষ্টি) ×
(সমান্তরাল বাহু দুটির মধ্যেকার লম্ব দূরত্ব)

চিত্র	আকৃতির নাম	কালি নির্ণয়ের সূত্র
	বৃত্ত (Circle)	$\pi \times$ (ব্যাসার্ধ)^2 $= \pi r^2$
	চতুর্ভুজ (Quadrilateral)	$\frac{1}{2}$ (শাখা লম্বের সমষ্টি) $\times$ কর্ণ $\left[\frac{1}{2}\text{ Sum of the offsets} \times \text{diagonal}\right]$ $= \frac{1}{2}\,(h_1 + h_2)\,d$
	রম্বাস (Rhombus)	$= \frac{1}{2} \times$ কর্ণ দুটির গুণফল $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

ওপরের চিত্রগুলো দ্বিমাত্রিক। যদি সেমি এককে মাপগুলো নেই তাহলে তাদের কালির একক হবে বর্গ সেমি বা সংক্ষেপে সেমি^{2}। আবার যদি মিটারের মাপগুলো নেই তাহলে তাদের কালির একক হবে বর্গমিটার বা সংক্ষেপে মিটার^2।

উদাহরণ 1 ঃ বর্গাকৃতির একটি বাগানের দৈর্ঘ্য 40 মিটার। অন্যদিকে আয়তাকৃতির একটি বাগানের দৈর্ঘ্য 50 মিটার ও প্রস্থ 30 মিটার। দুইটি বাগানের প্রত্যেকটির পরিসীমা কত? কোন বাগানটির কালি বেশি ও কত বেশি?

সমাধান ঃ বর্গাকৃতি বাগানটির ক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য (a) = 40 মিটার

পরিসীমা = 4 × একটি বাহুর মাপ

= 4 × a

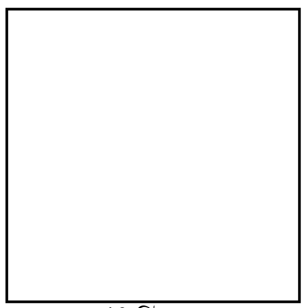
= 4 × 40 মি

= 160 মি

$\therefore$ কালি $= a^2$

= (40 মিটার)^2

= 1600 বর্গ মিটার



40 মিটার

আয়তাকৃতির বাগানটির ক্ষেত্রে

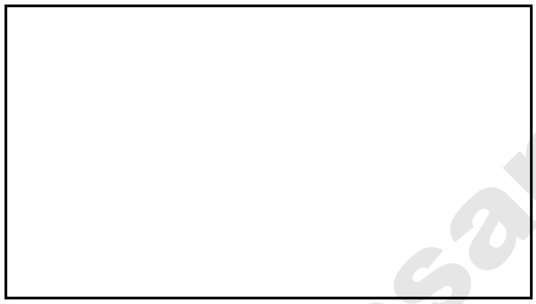
দৈর্ঘ্য $(l) = 50$ মিটার

প্রস্থ $(b) = 30$ মিটার

$\therefore$ কালি $= l \times b$

$= 50$ মিটার $\times 30$ মিটার

$= 1500$ বর্গ মিটার



$\therefore$ পরিসীমা $= 2 \times (l + b)$

$= 2 \times (50 + 30)$

$= 2 \times 80$

$= 160$ মি

$\therefore$ বর্গাকৃতির বাগানটির কালি আয়তাকৃতির বাগানটির কালির থেকে $(1600 - 1500) = 100$ বর্গ মিটার বেশি। লক্ষ করেছ তো? দুটির আকৃতিগত **পরিসীমা এক হলেও কালি ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে।**

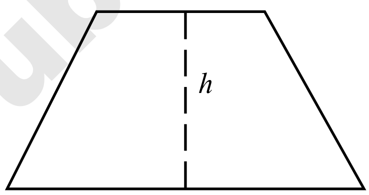
উদাহরণ 2 ঃ একটি ট্র্যাপিজিয়ামের কালি 200 বর্গ মিটার। সমান্তরাল বাহু দুটির ক্ষুদ্র বাহুটির দৈর্ঘ্য 20 মিটার এবং এদের মধ্যের লম্ব দূরত্ব 8 মিটার। সমান্তরাল বাহু দুটির অন্য বাহুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ সমান্তরাল একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $(a) = 20$ মিটার

ধরা হল অন্যটি সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্য b মিটার

উচ্চতা $(h) = 8$ মিটার

ট্র্যাপিজিয়ামের কালি = 200 বর্গ মিটার



$\therefore \frac{1}{2}(a + b)h = 200$

বা, $\frac{1}{2}(20 + b).8 = 200$

বা, $4(20 + b) = 200$

বা, $20 + b = 50$

বা, $b = 50 - 20$ [পক্ষান্তর করে]

$\therefore b = 30$

$\therefore$ অন্য বাহুটির মাপ = 30 মিটার

উদাহরণ 3 ঃ একটি রম্বাসের কর্ণ দুটির দৈর্ঘ্য 10 সেমি ও 14 সেমি। রম্বাসটির কালি নির্ণয় করো।

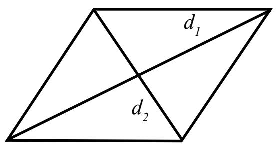
সমাধান ঃ কর্ণ দুটির দৈর্ঘ্য $(d_1) = 10$ সেমি

$(d_2) = 14$ সেমি

রম্বাসটির কালি $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

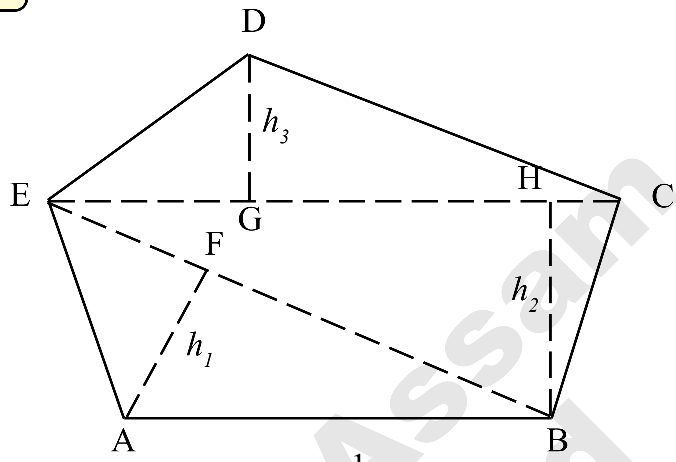
$= \frac{1}{2} \times 10 \times 14$ বর্গ সেমি

$= 70$ বর্গ সেমি



11.1 বহুভুজের কালি (Area of Polygn) :

ABCDE একটি পঞ্চভুজ। এই পঞ্চভুজটির কালি বের করতে হবে। EB ও EC দুটি কর্ণ এঁকে পঞ্চভুজটিকে তিনটি ত্রিভুজে ভাগ করা হলো।
এই ত্রিভুজ তিনটির কালির সমষ্টিই হল পঞ্চভুজটির কালি।



ত্রিভুজকয়টির কালি কীভাবে নির্ণয় করবে ভেবেছ কি? ত্রিভুজের কালি = $\frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা।

ত্রিভুজ কয়টির ভূমি ও উচ্চতা নিশ্চিত করতে পারলে তাদের কালি নির্ণয় করা যাবে।

EB ও EC কর্ণ দুটিকে ত্রিভুজকয়টির ভূমি হিসাবে ধরলে এই কর্ণ দুটির ওপরে বিপরীত শীর্ষ বিন্দুর থেকে লম্ব হবে ক্রমে AF, BH এবং DG।

∴ ABCDE পঞ্চভুজটির কালি = Δ ABE-র কালি + ΔBCE -র কালি + ΔCDE-র কালি।

$$= \frac{1}{2} EB.AF + \frac{1}{2} EC.BH + \frac{1}{2} EC.DG$$
$$= \frac{1}{2} EB.h_1 + \frac{1}{2} EC.h_2 + \frac{1}{2} EC.h_3$$

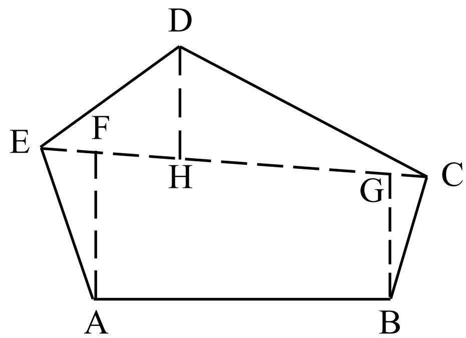
আবার আমরা পঞ্চভুজটির কালি অন্য একটি নিয়মের সাহায্যে বের করি এসো—

ABCDE পঞ্চভুজটির EC কোণ টেনে নাও। এখন এর ওপরে AF ও BG লম্ব টেনে নেওয়ায় ABGF একটি ট্র্যাপিজিয়াম পাওয়া গেল কি? ECর ওপরে শীর্ষ বিন্দু Dর থেকে আবার DH লম্ব টানা হল।

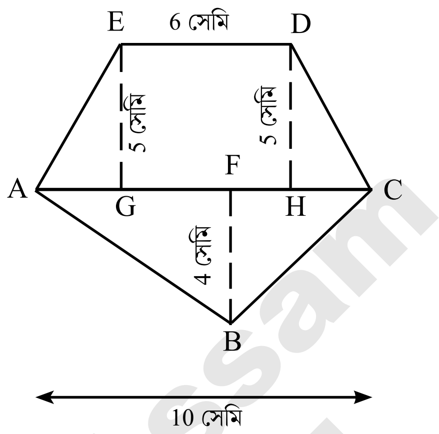
ABCDE পঞ্চভুজের কালি = AFE সমকোণী ত্রিভুজের কালি + ABGF ট্র্যাপিজিয়ামের কালি + BGC সমকোণী ত্রিভুজের কালি + ECD ত্রিভুজের কালি।

$$= \frac{1}{2} EF.AF + \frac{1}{2}(AF+BG).FG + \frac{1}{2}CG.BG + \frac{1}{2}EC.DH$$

দেখা গেল, একটি **পঞ্চভুজের কালি নির্ণয় করতে পঞ্চভুজটিকে সরল জ্যামিতিক চিত্র যেমন ত্রিভুজ, বর্গ, আয়ত, ট্র্যাপিজিয়াম ইত্যাদিতে ভাগ করে নিতে পারি। এগুলো কালির যোগফলেই পঞ্চভুজটির কালি।**



উদাহরণ 3 ঃ পাশের বহুভুজটির কালি নির্ণয় করো।



সমাধান ঃ

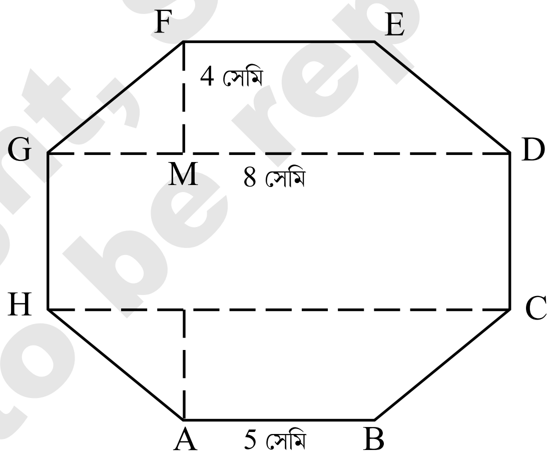
$$\Delta\, ABC\text{র কালি} = \frac{1}{2}\ AC \times BF$$
$$= \frac{1}{2} \times 10 \text{ সেমি} \times 4 \text{ সেমি}$$
$$= 20 \text{ বর্গ সেমি}$$

$$ACDE \text{ ট্র্যাপিজিয়ামের কালি} = \frac{1}{2}\ (AC + ED) \times EG$$
$$= \frac{1}{2}\ (10 + 6) \times 5 \text{ বর্গ সেমি}$$
$$= \frac{1}{2} \times 16 \times 5 \text{ বর্গ সেমি}$$
$$= 40 \text{ বর্গ সেমি}$$

$\therefore$ ABCDE বহুভুজ (পঞ্চভুজ)-এর কালি $= \Delta ABC$র কালি + ACDE ট্র্যাপিজিয়ামের কালি

$$= (20 + 40) \text{ বর্গ সেমি}$$
$$= 60 \text{ বর্গ সেমি}$$

উদাহরণ 4 ঃ পাশের চিত্রে ABCDEFGH একটি সুষম অষ্টভুজ (Octagon)। এর কালি নির্ণয় করো।



সমাধান ঃ এখানে AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HA = 5 সেমি

FM = 4 সেমি

GD = 8 সেমি

$$GDEF \text{ ট্র্যাপিজিয়ামের কালি} = \frac{1}{2}\ (GD + EF) \times FM$$

$= \frac{1}{2}(8+5) \times 4$ বর্গ সেমি

= 26 বর্গ সেমি

আবার HCDG আয়তের কালি = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

= GD × GH

= 8 × 5 বর্গ সেমি

= 40 বর্গ সেমি

যেহেতু ABCDEFGH একটি সুষম অষ্টভুজ

অতএব ABCH ট্র্যাপিজিয়ামের কালি = GDEF ট্র্যাপিজিয়ামের কালি = 26 বর্গ সেমি

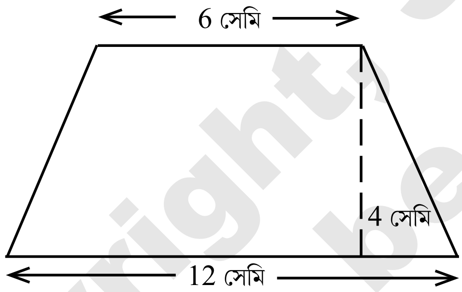
এবার ABCDEFGH অষ্টভূজের কালি = GDEF ট্র্যাপিজিয়ামের কালি + HCDG আয়তের কালি + ABCH ট্র্যাপিজিয়ামের কালি।

= (26 + 40 + 26) বর্গ সেমি

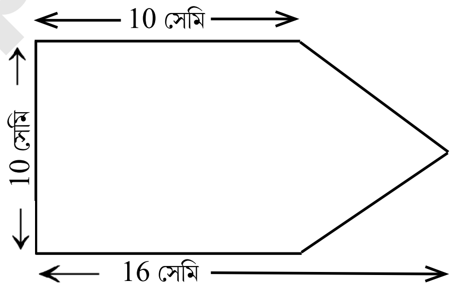
= 92 বর্গ সেমি

অনুশীলনী 11.1

1. নীচের চিত্রগুলোর কালি নির্ণয় করো —



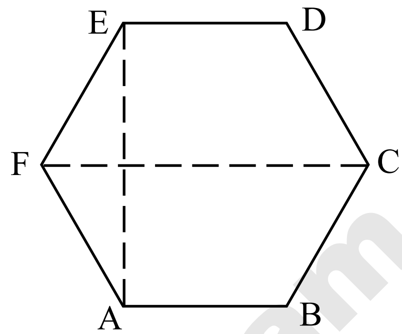
(a)



(b)

2. একটি ট্র্যাপিজিয়ামের কালি 34 বর্গ সেমি। যদি ট্র্যাপিজিয়ামটির সমান্তরাল বাহুদুটোর একটির দৈর্ঘ্য 10 সেমি হয় এবং এদের মধ্যের দূরত্ব 4 সেমি হয়, তাহলে অন্যটি (সমান্তরাল) বাহুর দৈর্ঘ্য বের করো।
3. একটি চতুর্ভুজের কর্ণটির দৈর্ঘ্য 20 মি এবং এর ওপরের বিপরীত শীর্ষবিন্দু দুটির থেকে টানা লম্ব দুটির দৈর্ঘ্য 8.5 মিটার এবং 11 মিটার। চতুর্ভুজটির কালি কত হবে?
4. একটি রম্বাসের কোণ দুটির দৈর্ঘ্য 10 সেমি এবং 14 সেমি। রম্বাসটির কালি কত হবে?
5. একটি চতুর্ভুজের কালি 100 বর্গ সেমি। শাখা লম্ব দুটির দৈর্ঘ্য 6 সেমি ও 4 সেমি। শাখা লম্ব দুটির লম্ব হওয়া কর্ণটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

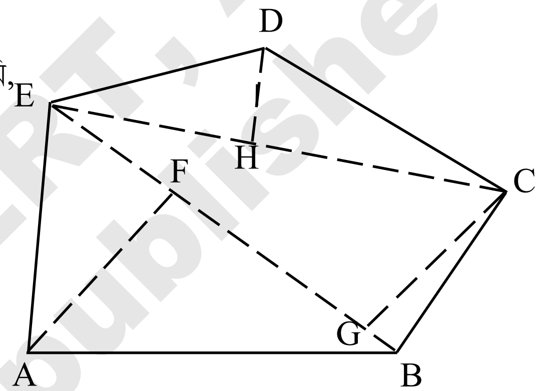
6. একটি সুষম ষড়ভুজ ABCDEF-এর প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি CF = 10 সেমি AE = 8 সেমি। সুষম ষড়ভুজটির কালি নির্ণয় করো। ভিন্ন ভিন্ন ভাবে বের করতে চেষ্টা করো।



7. একটি রম্বাসের কালি এবং একটি ত্রিভুজের কালি সমান। যদি ত্রিভুজটির ভূমি এবং অনুরূপ উন্নতির দৈর্ঘ্য ক্রমে 24.8 সেমি এবং 5.5 সেমি ও রম্বাসটির একটি কোণের দৈর্ঘ্য 22 সেমি হলে অন্য কোণটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

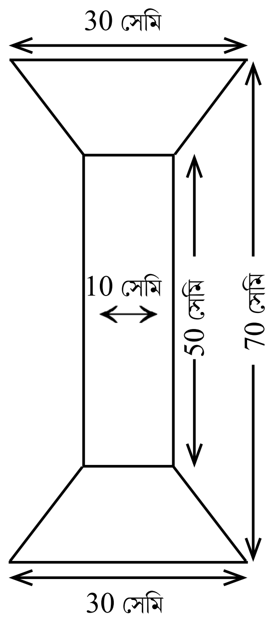
8. ট্র্যাপিজিয়াম আকৃতির একটি বাগানের কালি 480 মিটার^2, উচ্চতা 15 মিটার ও সমান্তরাল একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 20 মিটার। অন্য সমান্তরাল বাহুটির মাপ বের করো।

9. ABCDE বহুভুজটির BE = 8 সেমি, CE = 10 সেমি, AF = 5 সেমি, CG = 4 সেমি, DH = 3 সেমি হলে বহুভুজটির কালি নির্ণয় করো।

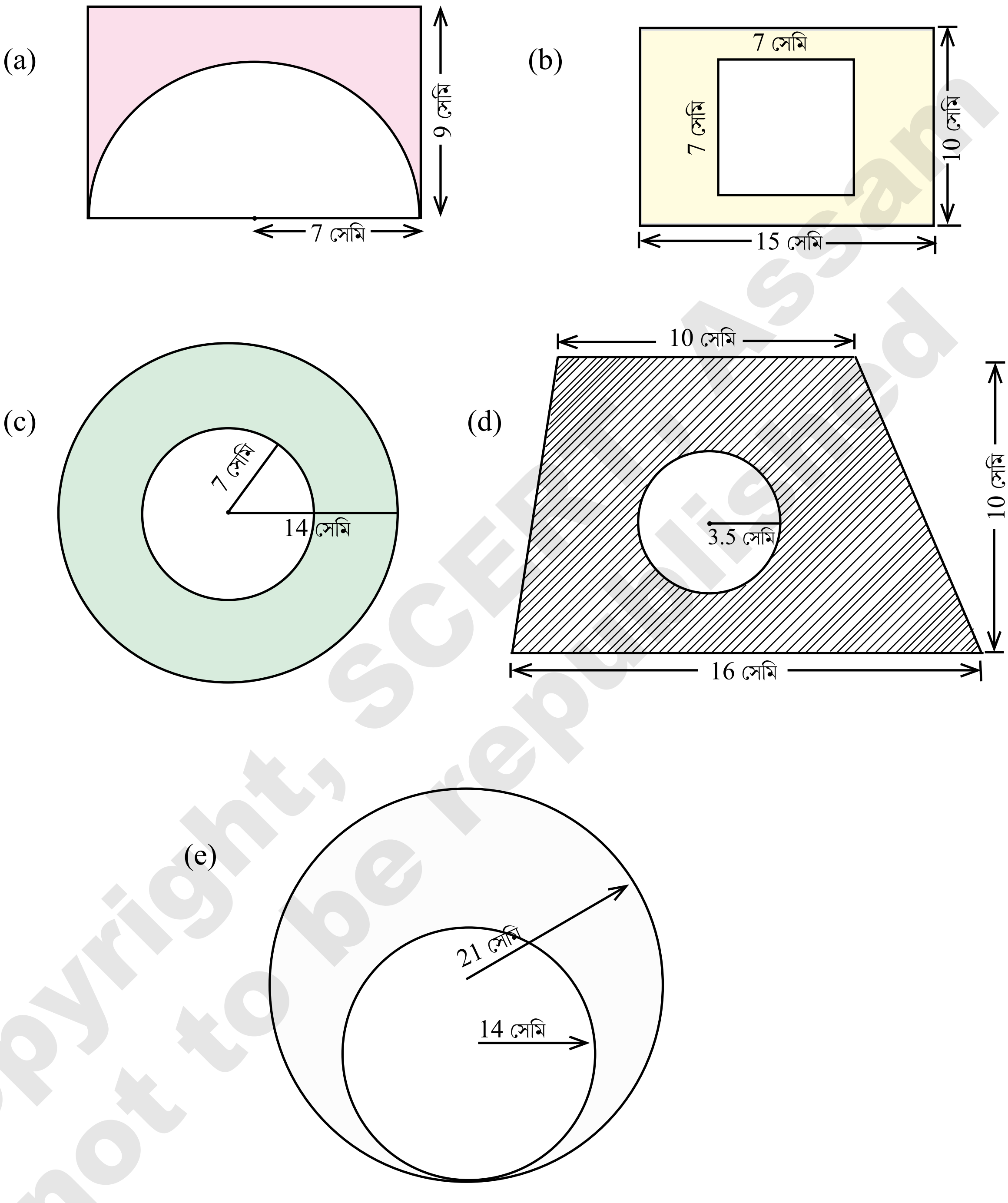


10. একটি ট্র্যাপিজিয়ামের কালি 68 সেমি^{2} ও সমান্তরাল বাহু দুটির দৈর্ঘ্য ক্রমে 13 সেমি ও 21 সেমি হলে সমান্তরাল বাহুদুটির মধ্যেকার দূরত্ব বের করো।

11. পাশের চিত্রটির কালি নির্ণয় করো।



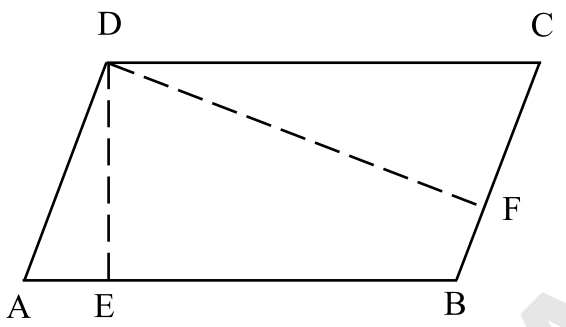
12. নীচের ছবিগুলোর আচ্ছাদিত অংশের কালি নির্ণয় করো। $\left(\pi = \dfrac{22}{7}\right)$



13. একটি ট্র্যাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুটির মাপ 7 সেমি ও 5 সেমি, উচ্চতা 4 সেমি হলে ট্র্যাপিজিয়ামটির কালি নির্ণয় করো।

14. একটি রম্বাসের বাহুর দৈর্ঘ্য 13 সেমি ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 24 সেমি হলে রম্বাসটির কালি বের করো।

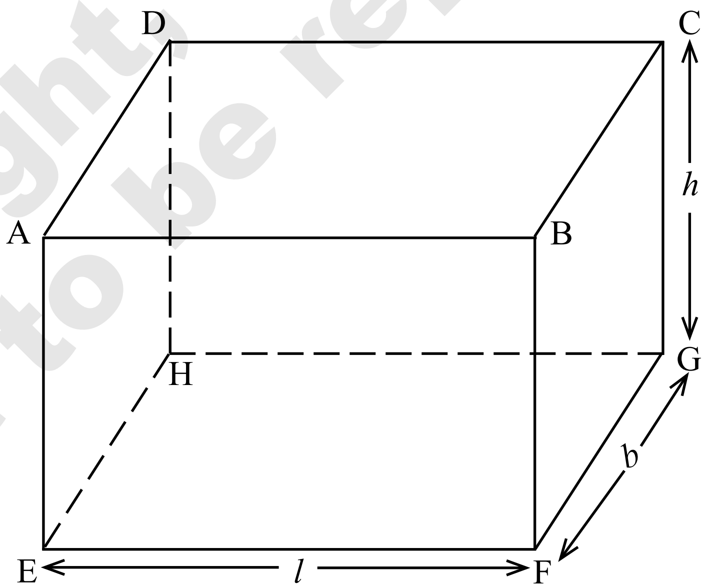
15. ABCD সামান্তরিকের DE ও DF দুটি লম্ব। AB = 12 সেমি, DE = 7 সেমি, DF = 14 সেমি হলে সামান্তরিকটির BC বাহুর মাপ নির্ণয় করো।

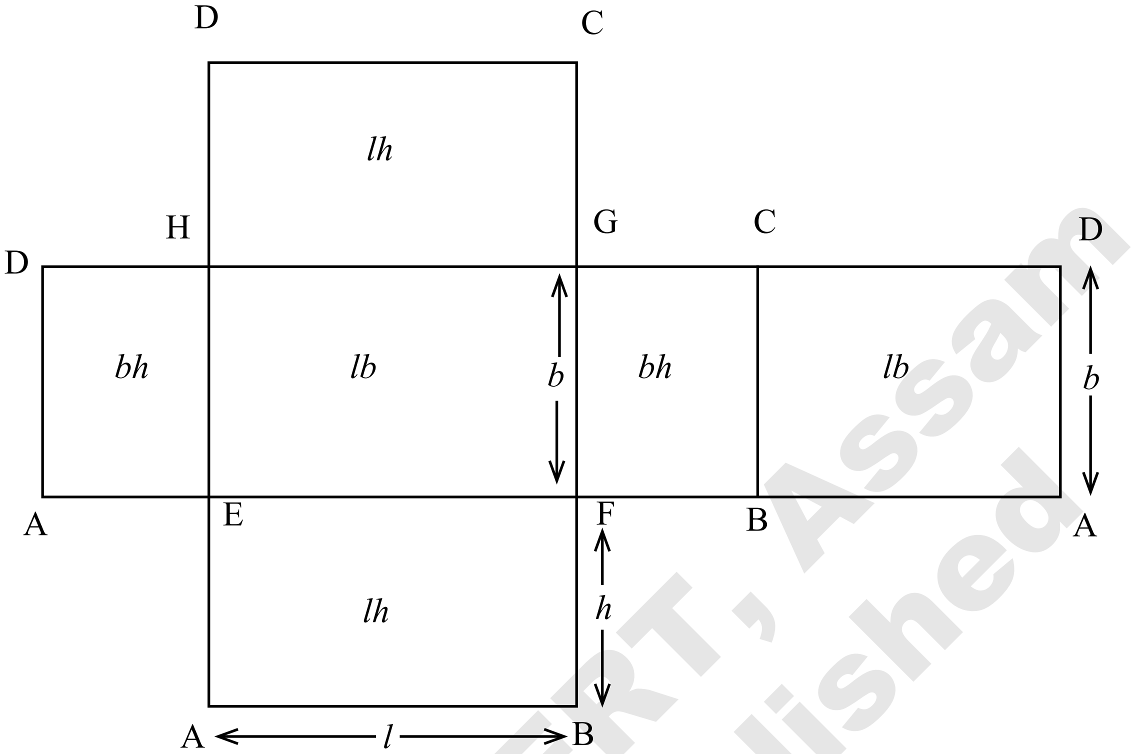


16. একটি ট্র্যাপিজিয়ামের কালি 180 সেমি^{2}। এর সমান্তরাল বাহু দুটির অনুপাত 1 : 2 । সমান্তরাল বাহু দুটির মধ্যের দূরত্ব 12 সেমি। সমান্তরাল বাহু দুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

11.2 আয়তীয় ঘনকের পৃষ্ঠকালি (Surface Area of a Cuboid) :

একটি চকের বাক্স নাও। বাক্সের নীচটা একটি কাঁচির সাহায্যে কেটে বের করো। একই মাপের তল তিনজোড়া পাওয়া গেল। এই তল 6 টির মোট কালিই চক বাক্সটির মোট পৃষ্ঠকালি।





এর তল 6 টি হল AEHD, EFGH, FBAE, HGCD, FBCG ও ABCD.

আয়তীয় ঘনকটির ভূমির তল দুটি ABCD ও EFGH এবং পার্শ্বতল চারটি AEHD, FBAE, HGCD ও FBCG.

আয়তীয় ঘনকটির দৈর্ঘ্য $= l$, প্রস্থ $= b$ ও উচ্চতা $= h$ বলে ধরলে

AEHD তলের কালি $= bh$

EFGH তলের কালি $= lb$

FBAE তলের কালি $= lh$

HGCD তলের কালি $= lh$

FBCG তলের কালি $= bh$

ABCD তলের কালি $= lb$

$\therefore$ আয়তীয় ঘনকটির মোট পৃষ্ঠকালি $=$ 6 টি তলের মোট কালি

$= bh + lb + lh + lh + bh + lb$

$= 2\,lb + 2\,bh + 2\,lh$

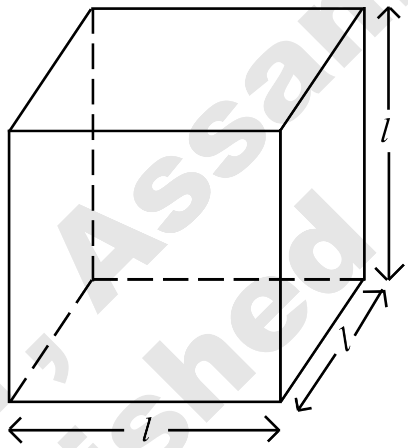
$= 2(lb + bh + lh)$

খেয়াল রাখবে ঃ আয়তীয় ঘনকের মোট পৃষ্ঠকালি $= 2(lb + bh + lh)$

পার্শ্বীয় পৃষ্ঠ (*Lateral surface*) ঃ যেকোনো ত্রিমাত্রিক আকৃতির (গোলকের বাইরে) বস্তুর তল ও ওপরের পৃষ্ঠ দুটি বাদ দিয়ে যে পৃষ্ঠগুলো থাকে, সেই পৃষ্ঠগুলোকে সেই আকৃতিটির **পার্শ্বীয় পৃষ্ঠ** বলা হয়।

আয়তীয় ঘনকটির মোট পার্শ্বীয় পৃষ্ঠকালি $= lh + bh + lh + bh$
$= 2lh + 2bh$
$= 2h(l + b)$
$= 2(l + b) \times h$
$=$ পরিসীমা $\times$ উচ্চতা

11.3 ঘনকের পৃষ্ঠকালি (Surface Area of Cube) :



ইতিমধ্যে তোমরা আয়তীয় ঘনকের পৃষ্ঠকালি কীভাবে নির্ণয় করতে হয় শিখলে। তোমরা এও জানলে যে ঘনকের ক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান। ঘনকের পৃষ্ঠকালি বের করতে আমরা আয়তীয় ঘনকের পৃষ্ঠকালির সূত্রতে $l = b = h$ ব্যবহার করেও বের করতে পারি।

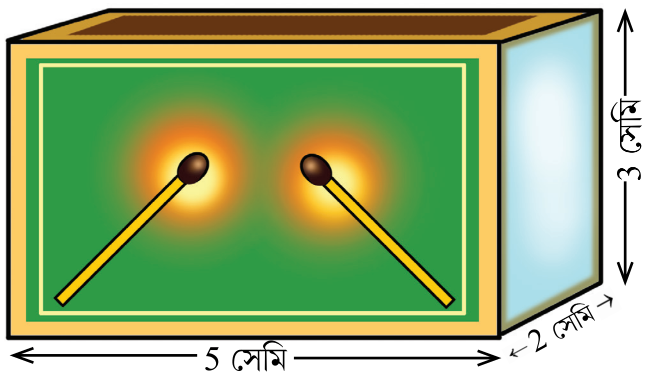
ঘনকের পৃষ্ঠকালি $= 2(l^2 + l^2 + l^2) = 6l^2$

ঘনকটির ওপর ও ভূমিতল দুটি বাদ দিয়ে বাকি চারটি তলই হবে ঘনকটির পার্শ্বতল।

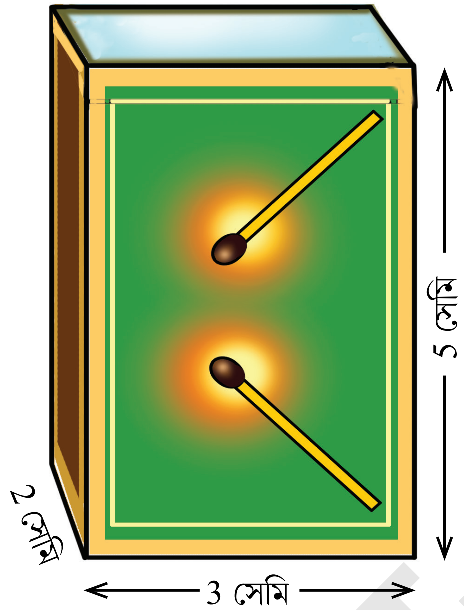
ঘনকটির পার্শ্বপৃষ্ঠ কালি $= 4 \times l^2$

কার্য ঃ এক ধরণের তিনটি দেশলাইর বাক্স সংগ্রহ করো। বাক্সগুলোর নীচের ছবিগুলোর মতো দাঁড় করিয়ে রাখো।

চিত্র (a)



চিত্র (b)



চিত্র (c)

দেশলাই বাক্সটির দৈর্ঘ্য $(l) = 5$ সেমি, প্রস্থ $(b) = 3$ সেমি ও উচ্চতা $(h) = 2$ সেমি ধরে চিত্র (a), (b) ও (c)র পার্শ্বতলের কালি বের করো।। প্রতিটি ক্ষেত্রেই পার্শ্বপৃষ্ঠের কালি একই পেলে কি? যদি পাওনি, তাহলে কেন পাওনি চিন্তা করো। (শিক্ষকের সাহায্য নেবে) অন্য আয়তীয় ঘনক আকৃতির বস্তু নিয়েও (যেমন দাঁতের মাজনের বাক্স, জুতার বাক্স, ওষুধের বাক্স ইত্যাদি) একই ধরণে ভূমিতল পরিবর্তিত করে পার্শ্বীয় পৃষ্ঠকালিগুলো বের করতে চেষ্টা করো।

আরো একবার তিনিটি এক ধরণের লুডো ডাইস (Dice) নিয়ে ভিন্ন ভিন্ন তলকে ভূমিতল হিসাবে নিয়ে দাঁড় করিয়ে নাও। প্রতিটি পার্শ্বতলের কালি নির্ণয় করো। এবার একই পেলে কি?

আয়তীয় ঘনকের ভূমিতল ভিন্ন ভিন্ন রাখলে তাদের পার্শ্বতলের কালি একই হয় কিনা দেখ।

খেয়াল করবে ঃ তল, পিঠ, পৃষ্ঠ— তিনটি শব্দ একই অর্থ বোঝাচ্ছে।

উদাহরণ 1 ঃ একটি চক বাক্সের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা ক্রমে 16 সেমি, 8 সেমি ও 6 সেমি হলে চক বাক্সটির মোট পৃষ্ঠকালি ও পার্শ্বপৃষ্ঠের কালি বের করো।

সমাধান ঃ যেহেতু চক বাক্সটি আয়তীয় ঘনক আকৃতির

$l = 16$ সেমি $\quad b = 8$ সেমি $\quad h = 6$ সেমি

$\therefore$ চক বাক্সটির মোট পৃষ্ঠকালি $= 2\,(lb + bh + lh)$

$= 2(16 \times 8 + 8 \times 6 + 16 \times 6)$ বর্গ সেমি

$= 544$ বর্গ সেমি

চক বাক্সটির পার্শ্বীয়পৃষ্ঠ কালি $= 2\,(lh + bh)$

$= 2\,(16 \times 6 + 8 \times 6)$ বর্গ সেমি

$= 288$ বর্গ সেমি

উদাহৰণ 2 ঃ একটি ঘনকের মোট পৃষ্ঠকালি 384 বর্গ মিটার হলে ঘনকটির প্রতিটি বাহুর মাপ কত?

সমাধান ঃ ধরে নাও প্রতিটি বাহুর মাপ $= l$ মিটার

ঘনকটির মোট পৃষ্ঠকালি $= 384$ বর্গ মিটার

অতএব $6\,l^2 = 384$

$$l^2 = \frac{384}{6} = 64 = 8^2$$

$l = 8$

প্রতিটি বাহুর মাপ = 8 মি

উদাহৰণ 3 ঃ একটি আয়তীয় ঘনক আকৃতির কোঠার ভিতরের মাপ 16 মিটার × 10 মিটার × 8 মিটার। প্রতি বর্গ মিটারে 10 টাকা হিসাবে কোঠাটির ভিতরের চারটি বেড়ায় চুণ দিতে কত টাকা খরচ হবে?

সমাধান ঃ ধরে লওয়া কোঠাটির দৈর্ঘ্য $(l) = 16$ মিটার

কোঠাটির প্রস্থ $(b) = 10$ মিটার

কোঠাটির উচ্চতা $(h) = 8$ মিটার

$\therefore$ কোঠাটির চারটি বেড়ার কালি $= 2(lh + bh)$

$= 2(l + b).h$

$= 2(16 + 10).8$ বর্গ মিটার

$= 2 \times 26 \times 8$ বর্গ মিটার

$= 416$ বর্গ মিটার

1 বর্গ মিটার বেড়ায় চুণ দিতে খরচ হয় =10 টাকা

$\therefore$ 416 বর্গ মিটার বেড়ায় চুণ দিতে খরচ হয় $= 10 \times 416 = 4160$ টাকা

উদাহৰণ 4 ঃ একটি ঘনকের ভূমি পৃষ্ঠে একটির কালি 25 বর্গ সেমি হলে ঘনকটির মোট পৃষ্ঠকালি কত হবে?

সমাধান ঃ ঘনকের একটি পৃষ্ঠের কালি $(l^2) = 25$ বর্গ সেমি

আমরা জানি যে ঘনকটির মোট পৃষ্ঠকালি$= 6 \times l^2$

$= 6 \times 25$ বর্গ সেমি

$= 150$ বর্গ সেমি

উদাহৰণ 5 ঃ 2 লিটার রঙে 9.375 বর্গ মিটার জায়গা রং করতে পারে। সেই পরিমাণের রঙে 22.5 সেমি × 10 সেমি × 7.5 সেমি মাপের কতটি ইটের টুকরো রং করতে পারা যাবে?

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, ইটের টুকুরার দৈর্ঘ্য $(l) = 22.5$ সেমি, প্রস্থ $(b) = 10$ সেমি

উচ্চতা $(h) = 7.5$ সেমি, ইটের টুকুরার মোট পৃষ্ঠকালি $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2(22.5 \times 10 + 10 \times 7.5 + 7.5 \times 22.5)$ বর্গ সেমি

$= 2(225 + 75 + 168.75)$ বর্গ সেমি

$= 937.5$ বর্গ সেমি

2 লিটারে $= 9.375$ বর্গ মিটার রং করা যায়

$= 9.375 \times 10000$ বর্গ সেমি

$= 93750$ বর্গ সেমি

রং করা যাবে এমন ইটের সংখ্যা $\frac{93750}{937.5}$ টি

$= \frac{937500}{9375}$ টি

$= 100$ টা

1 মিটার = 100 সেমি
1 বর্গ মিটার = 100 × 100 বর্গ সেমি
= 10000 বর্গ সেমি

উদাহরণ 6 ঃ একটি আয়তীয় ঘনক আকৃতির তেলের টিনের মাপ 30 সেমি × 40 সেমি × 50 সেমি। প্রতি বর্গ মিটার টিনে 20 টাকা হিসাবে তেমন 20 টা টিন বানাতে কত খরচ হবে?

সমাধান ঃ টিনটির দৈর্ঘ্য $(l) = 30$ সেমি, প্রস্থ $(b) = 40$ সেমি, উচ্চতা $(h) = 50$ সেমি

$\therefore$ টিনটির মোট পৃষ্ঠকালি $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2(30 \times 40 + 40 \times 50 + 30 \times 50)$ বর্গ সেমি

$= 2(1200 + 2000 + 1500)$ বর্গ সেমি

$= 2 \times 4700$ বর্গ সেমি

$= 9400$ বর্গ সেমি

20টি টিনের মোট পৃষ্ঠকালি $= 20 \times 9400$ বর্গ সেমি

$= 188000$ বর্গ সেমি

$= \frac{188000}{10000}$ বর্গ মিটার

$= 18.8$ বর্গ মিটার

আবার, 1 বর্গ মিটার টিনের খরচ $= 20$ টাকা

$\therefore$ 18.8 বর্গ মিটার টিনের খরচ $= (20 \times 18.8)$ টাকা

$= 376$ টাকা

20টা টিন বানাতে মোট খরচ হবে = 376 টাকা

11.4 চোঙার পৃষ্ঠকালি (Surface Area of Cylinder) :

পাশের চিত্রটি লক্ষ্য করো। চিত্রের সবকয়টি জিনিস চোঙা আকৃতির। চারদিকেই তোমরা এরকম চোঙাকৃতির বহু ধরণের বস্তু দেখতে পাবে।

এধরণের চোঙাকৃতি একটি বস্তু লক্ষ্য করলে দেখাতে পাবে যে তাদের

(i) একটি পার্শ্বীয় তল

(ii) দুটি বৃত্তাকৃতির সমতল পাওয়া যায়।

একটি চোঙাকৃতির কৌটো নিয়ে তার চারদিক কাগজ দিয়ে এমনভাবে পেচিয়ে দাও যাতে তা চোঙাটির গায়ে লেগে যায়। বাকি অংশগুলো কাঁচি দিয়ে কেটে নাও। এই কাগজটির কালিই হবে চোঙাটির পৃষ্ঠকালি। কাগজটি খুলে আনলে তা আয়তাকৃতির হবে। কাগজ টুকরার দৈর্ঘ্য কৌটোটির বৃত্তাকৃতির পরিধির সমান এবং প্রস্থ কৌটোটির উচ্চতার সমান। কৌটোটির পার্শীয় (বা বক্র) নীচের কাগজটির আয়ত আকৃতির (চিত্র i)।

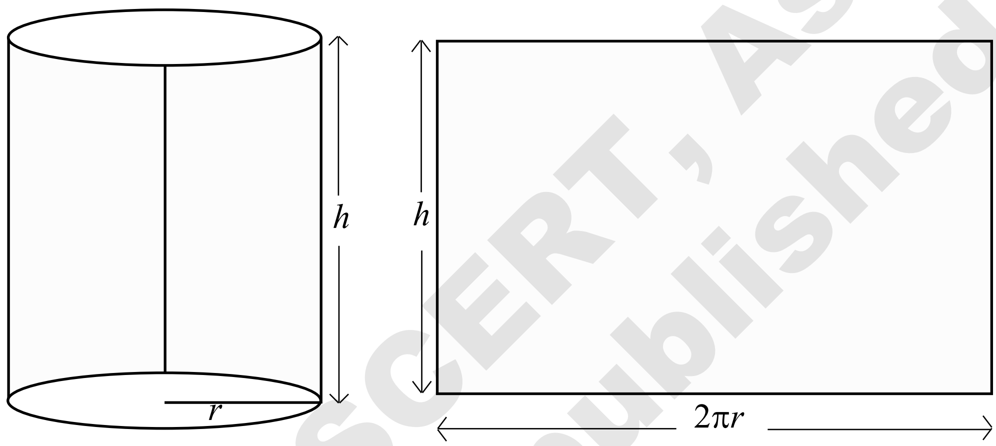
কৌটোটির পার্শ্বতলের কালি = আয়তাকৃতি কাগজটির কালি

= দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

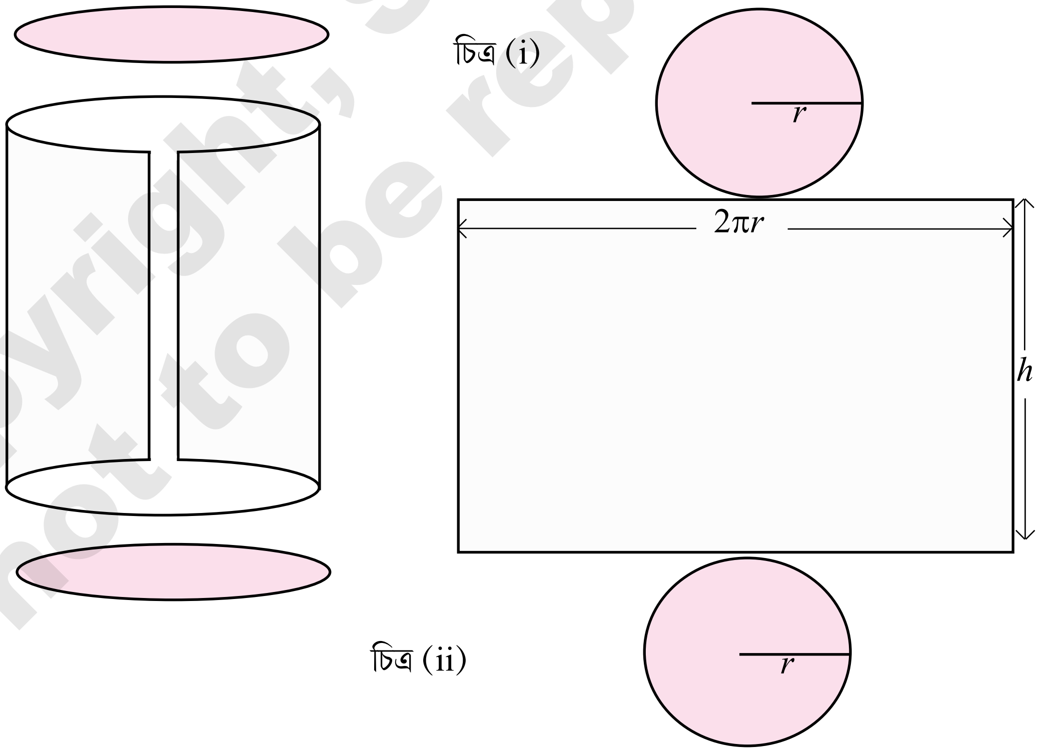
= কৌটোটির বৃত্তাকৃতি তলের পরিসীমা × কৌটোটির উচ্চতা

= $2\pi r \times h$

এখানে 'r' হল চোঙাটির ব্যাসার্ধ আর- 'h' হল চোঙাটির উচ্চতা।



চিত্র (i)



চিত্র (ii)

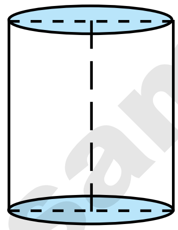
ওপৰ ও নীচের দিকে থাকা বৃত্তাকৃতির তল দুটির কালি = $2 \times \pi r^2$ চিত্র (ii)

$\therefore$ কৌটোটির মোট পৃষ্ঠকালি = পার্শ্ব তলের কালি + বৃত্তাকৃতির তলের কালি

$$= 2\pi hr + 2\pi r^2$$

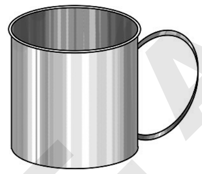
$$= 2\pi r\,(r + h)$$

খেয়াল করবে ঃ চোঙাটির বৃত্তাকৃতির তল দুটির কেন্দ্র সহযোগী অক্ষটি বৃত্তাকৃতির তল দুটির প্রত্যেকেরই লম্ব হওয়ার জন্য এই চোঙাটিকে **সমকোণীয় বৃত্তাকৃতি চোঙা (Right circular cylinder)**বলা হয়।



একটি খোলা বা একটি মুখবন্ধ চোঙার পৃষ্ঠকালি .

একটি মুখ খোলা চোঙার পার্শ্বীয় তল ও একটি বৃত্তাকৃতির তল থাকবে।

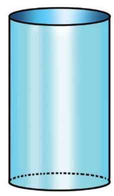


অতএব মোট পৃষ্ঠকালি = $2\pi rh + \pi r^2$

দুটি মুখ খোলা চোঙার পৃষ্ঠকালি .

দুটি মুখ খোলা চোঙার ক্ষেত্রে পার্শ্বীয় তলটিই থাকবে।

অতএব মোট পৃষ্ঠকালি = $2\pi rh$



খেয়াল রাখতে হবে ঃ (i) একটি চোঙার মোট পৃষ্ঠকালি $= 2\pi r\,(r + h)$

(ii) একটি মুখ খোলা চোঙার পৃষ্ঠকালি $= 2\pi rh + \pi r^2$

(iii) দুটি মুখ খোলা চোঙার পৃষ্ঠকালি $= 2\pi rh$

উদাহরণ 7 ঃ একটি চোঙাকৃতি পাউডার দুধের কৌটার ভূমি ব্যাসার্ধ 7 সেমি ও উচ্চতা 15 সেমি হলে কৌটাটির পার্শ্বপৃষ্ঠের কালি ও মোট পৃষ্ঠকালি বের করো ($\pi = \frac{22}{7}$ ধরে)

সমাধান ঃ কৌটাটির ভূমি ব্যাসার্ধ $(r) = 7$ সেমি

কৌটাটির উচ্চতা $(h) = 15$ সেমি

কৌটাটির পার্শ্বপৃষ্ঠের কালি $= 2\pi rh$

$$= 2\times \frac{22}{7} \times 7 \times 15 \text{ বর্গ সেমি}$$

$$= 660 \text{ বর্গ সেমি}$$

কৌটাটির মোট পৃষ্ঠকালি $= 2\pi r\,(r + h)$

$$= 2\times \frac{22}{7} \times 7(7 + 15) \text{ বর্গ সেমি}$$

$$= 2 \times 22 \times 22 \text{ বর্গ সেমি}$$

$$= 968 \text{ বর্গ সেমি}$$

উদাহরণ 8 ঃ ধাতুর পাত দিয়ে নির্মিত বন্ধ একটি চোঙার ব্যাসার্ধ 7 সেমি ও মোট পৃষ্ঠকালি 968 বর্গ সেমি হলে চোঙাটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ বন্ধ চোঙাৰ ব্যাসাৰ্ধ (r) = 7 সেমি

চোঙাটিৰ মোট পৃষ্ঠকালি = 968 বৰ্গ সেমি

বা, $2\pi r(r+h) = 968$

বা, $2 \times \frac{22}{7} \times 7(7+h) = 968$

বা, $44 \times (7+h) = 968$

বা, $7 + h = \frac{968}{4}$

বা, $7 + h = 22$

বা, $h = 22 - 7$

$\therefore \quad h = 15$

চোঙাটিৰ উচ্চতা = 15 সেমি

উদাহৰণ 9 ঃ একটি চোঙাৰ উচ্চতা 14 সেমি ও বক্ৰপৃষ্ঠেৰ কালি 88 বৰ্গ সেমি হলে চোঙাটিৰ ব্যাসেৰ দৈৰ্ঘ্য বেৰ কৰো।

সমাধান ঃ

চোঙাৰ উচ্চতা (h) = 14 সেমি

বক্ৰপৃষ্ঠেৰ কালি = 88 বৰ্গ সেমি

প্ৰশ্নমতে, $2\pi rh = 88$ (আমৰা জানি যে একটি চোঙাৰ বক্ৰপৃষ্ঠেৰ কালি $= 2\pi rh$)

বা, $2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times r = 88$

বা, $88r = 88$

$\therefore \quad r = \frac{88}{88} = 1$

চোঙাটিৰ ব্যাস $= 2r$

$= 2 \times 1$ সেমি

$= 2$ সেমি

উদাহৰণ 10 ঃ 28 সেমি ব্যাস ও 10 মিটাৰ দৈৰ্ঘ্যেৰ জলেৰ একটি নল ৰং কৰলে কত টাকা লাগবে যদি প্ৰতি বৰ্গমিটাৰ ৰং কৰা খৰচ 120 টাকা হয়।

সমাধান ঃ জলেৰ নলটি দুটি মুখ খোলা চোঙা আকৃতিৰ

$\therefore$ নলটিৰ পৃষ্ঠকালি $= 2\pi rh$

$= \pi(2r)h$

য'ত $2r$ = ব্যাস = 28 সেমি

$= \frac{28}{100}$ মি

h = উচ্চতা বা নলটিৰ দৈৰ্ঘ্য = 10 মি

∴ নলটির পৃষ্ঠকালি $= \pi \times (2r)h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{28}{100} \times 10 \text{ বর্গ মি}$$

$$= \frac{88}{10} \text{ বর্গ মি}$$

দেওয়া আছে, 1 বর্গমিটার রং করতে খরচ হয় 120 টাকা

∴ $\frac{88}{10}$ বর্গমিটার রং করতে খরচ হব $= 120 \times \frac{88}{10}$

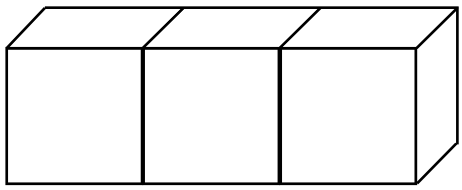
$= 88 \times 12$

$= 1056$ টাকা।

∴ রং করা খরচের পরিমাণ $= 1056$ টাকা

অনুশীলনী 11.2

1. একটি ঘনকের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 27 সেমি হলে ঘনকটির পৃষ্ঠকালি বের করো।
2. একটি কোঠার মেঝের পরিসীমা 30 মিটার এবং কোঠাটির উচ্চতা পরিসীমার $\frac{1}{10}$ অংশ হলে কোঠাটির চার দেওয়ালের কালি নির্ণয় করো।
3. আয়তীয় একটি ঘনকের মোট পৃষ্ঠকালি 50 বর্গ মিটার ও পার্শ্বপৃষ্ঠের কালি 30 বর্গ মি হলে এর ভূমি তলের কালি বের করো।
4. 80 সেমি × 48 সেমি × 24 সেমি মাপের একটি বাক্স একটি কাপড় দিয়ে ঢাকতে হবে। যদি কাপড়টির প্রস্থ 96 সেমি হয় তাহলে 100টা বাক্স ঢাকতে কত মিটার কাপড় প্রয়োজন।
5. একটি রোলারের ব্যাস 84 সেমি এবং দৈর্ঘ্য 120 সেমি। একটি খেলার মাঠ সমান করতে রোলারটির 500 বার ঘূর্ণনের আবশ্যক। প্রতি বর্গ মিটারে 75 পয়সা হিসাবে খেলার মাঠটি সমান করতে কত খরচ হবে?
6. একটি খোলা মুখের দই-র চোঙার ভূমি ব্যাসার্ধ 14 সেমি ও উচ্চতা 30 সেমি হলে চোঙাটির বাঁকা পিঠের কালি নির্ণয় করো।
7. 5 সেমি বাহু দৈর্ঘ্যর 3টি ঘনক লম্বায় লম্বায় নেওয়া হয়েছে। এই আয়তীয় ঘনকটির মোট পৃষ্ঠকালি বের করো।

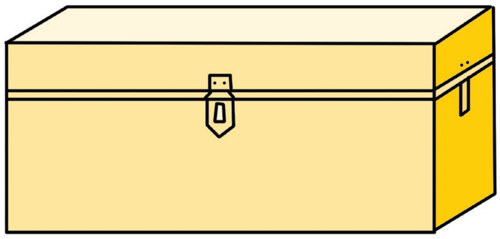


8. 14 সেমি উচ্চতার একটি চোঙা বক্রপৃষ্ঠের কালি 88 বর্গ সেমি হলে চোঙাটির ভূমির ব্যাস নির্ণয় করো।
9. একটি মন্দিরে 25টা লম্ব বৃত্তাকার খুঁটি আছে। প্রতিটি খুঁটির ব্যাসার্ধ 28 সেমি ও উচ্চতা 4 মিটার। প্রতি বর্গমিটারে 8 টাকা হারে খুঁটি কয়টির বক্রপৃষ্ঠায় রং করতে কত টাকা লাগবে।
10. 7 সেমি ব্যাসের ও 12 সেমি চোঙাকৃতি উচ্চতার একটি গেলাসের পার্শ্বীয় ও ভূমিতলের মোট পৃষ্ঠকালি কত হবে?

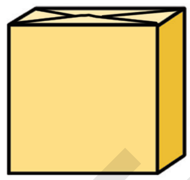
11. চিমেণ্টে নির্মিত একটি হিউম নলের (Hume Pipe) ব্যাস 1400 মি মি ও দৈর্ঘ্য 2500 মি মি। এরকম 22 টি নলের বাইরের দিকে রং করলে খরচ হবে বলে মনে হয়। কেননা, প্রতি বর্গ মিটারে 8 টাকা খরচ হয়?

11.5 আয়তীয় ঘনকের আয়তন (Volume of Cuboid) :

একটি ত্রিমাত্রিক বস্তু যতখানি জায়গা জুড়ে থাকে তার পরিমাণকে বস্তুটির আয়তন বলে। নীচে কয়েকটি ঘনক আকৃতির জিনিসের ছবি দেওয়া হয়েছে।



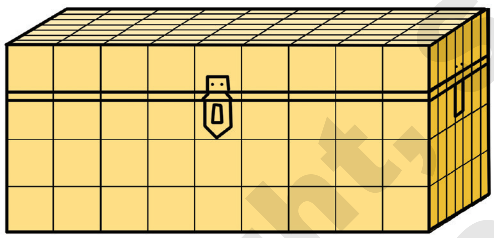
বাক্স



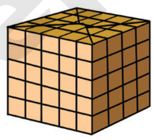
চকের বাক্স

ওষুধের বাক্স

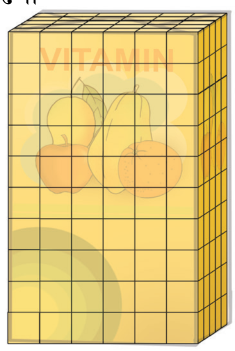
এবার কিছু সমান আয়তনের ঘনকের টুকরার দ্বারা এমন আয়তীয় ঘনক তৈরি করি এসো—



(i) (9 × 4 × 7)



(ii) (5 × 5 × 4)



(iii) (10 × 6 × 5)

একক আয়তনের ঘনকের সংখ্যা ঃ

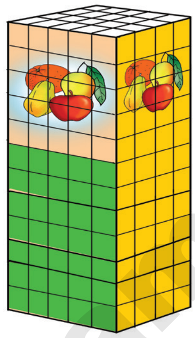
(i) দৈর্ঘ্য = 9 টা করে	(ii) দৈর্ঘ্য = 5 টা করে	(iii) দৈর্ঘ্য = 6 টা করে
প্রস্থ = 7 টা করে	প্রস্থ = 4 টা করে	প্রস্থ = 5 টা করে
উচ্চতা = 4 টা করে	উচ্চতা = 5 টা করে	উচ্চতা = 10 টা করে
মোট = 252 টা	মোট = 100 টা	মোট = 300 টা

লক্ষ্য করেছ কি ওপরে তৈরি করা আয়তীয় ঘনকগুলোর আয়তন আমরা ঘনকের সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করতে পারি।

যদি আমাদের ব্যবহৃত ঘনকের মাপ 1 সেমি × 1 সেমি × 1 সেমি বা এক ঘন সেমি হয়, তবে ওপরের আয়তীয় ঘনককয়টির আয়তন ক্রমে 252 ঘন সেমি, 100 ঘন সেমি এবং 300 ঘন সেমি অর্থাৎ আয়তীয় ঘনকগুলোর আয়তনের মাপ সেমি এককে প্রকাশ করতে পারি।

পাশে একটি ওষুধের বাক্সের ছবি দেওয়া আছে। যার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা ক্রমে 5 সেমি, 4 সেমি, 12 সেমি। এই বাক্সটি ঘন সেমির টুকরো দিয়ে তৈরি করতে কতটি ঘনক লাগবে। $(12 \times 4 \times 5)$ 240 টি নয় কি?

অর্থাৎ এর আয়তন হবে 240 ঘন সেমি বা 240 সেমি^{3}।



লক্ষ করো আয়তীয় ঘনকের আকার বোঝাতে দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা, এভাবে লেখা হয়। এর থেকে আয়তীয় ঘনকের আকার আমরা অনুমান করতে পারি। দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতার মাপ বোঝান সংখ্যাকয়টি গুণ করে আয়তীয় ঘনকটির আয়তন ঘন এককে প্রকাশ করতে পারি। নীচের তালিকটি পূর্ণ করো।

দৈর্ঘ্য (l) সেমি	প্রস্থ (b) সেমি	উচ্চতা (h) সেমি	আয়তন $= l \times b \times h$ ঘন সেমি
10	7	6	420
8	9	12	....
3	6	11	....
4	15	20	....
12	8	6	....
9	7	12	....

উদাহরণ 11 ঃ আয়তীয় একটি ঘনকের দৈর্ঘ্য 15 সেমি, প্রস্থ 10 সেমি ও উচ্চতা 8 সেমি হলে আয়তীয় ঘনকটির আয়তন নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ আয়তীয় ঘনকটির দৈর্ঘ্য (l) = 15 সেমি

আয়তীয় ঘনকটির প্রস্থ (b) = 10 সেমি

আয়তীয় ঘনকটির উচ্চতা (h) = 8 সেমি

∴ আয়তীয় ঘনকটির আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

= 15 সেমি × 10 সেমি × 8 সেমি

= 1200 ঘন সেমি

খেয়াল রাখবে ঃ বস্তুর আয়তন বড় হলে একক বড় নেওয়া হয়। উদাহরণস্বরূপ বড় চৌবাচ্চা একটির আয়তন মাপতে ঘন সেমির বদলে ঘন মিটার করতে পারি। তখন এর আয়তনের মাপ ঘনমিটার বা মিটার^{3}এ প্রকাশ করা হয়।

1 ঘন মিটার = 1 মি × 1 মি × 1 মি

= 100 সেমি × 100 সেমি × 100 সেমি

= 1000000 ঘন সেমি

= 10^6 ঘন সেমি

1 ঘন মিটার = 10^6 ঘন সেমি

উদাহরণ 12 ঃ একটি আয়তীয় ঘনকের আয়তন 440 ঘন সেমি। এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ ক্রমে 22 সেমি ও 4 সেমি হলে তার উচ্চতা কত?

সমাধান ঃ আয়তীয় ঘনকের আয়তন = 440 ঘন সেমি

দৈর্ঘ্য (l) = 22 সেমি

প্রস্থ (b) = 4 সেমি

অর্থাৎ $l \times b \times h = 440$

প্রশ্ন মতে, $22 \times 4 \times h = 440$

বা, $88\,h = 440$

$\therefore h = \frac{440}{8} = 5$

আয়তীয় ঘনকটির উচ্চতা = 5 সেমি

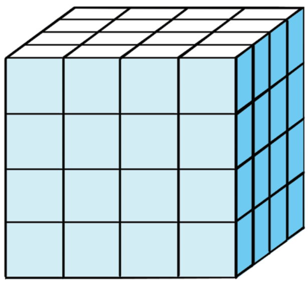
দলগত কার্য

24 টা রুবিক কিউব (Rubik cube) বা লুডো ডাইস (Ludo dice) সংগ্রহ করো। সে গুলি বিভিন্ন ধরণে সাজিয়ে বিভিন্ন আকৃতির আয়তীয় ঘনক তৈরি করো। প্রতিটি ক্ষেত্রে তৈরি হওয়া আয়তীয় ঘনকটির আয়তন ও পৃষ্ঠকালি নির্ণয় করো।

চিন্তা করো ঃ একটি আয়তনের আয়তীয় ঘনকগুলোর পৃষ্ঠকালি একই সমান হবে কি?

11.6 ঘনকের আয়তন (Volume of Cube)

যদি একটি আয়তীয় ঘনকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান হয়, তবে আয়তীয় ঘনকটিকে সুষম ঘনক বা ঘনক (Cube) বলে। অতএব যদি ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য l একক ধরা হয় তবে আয়তন হবে l^3 ঘন একক। পাশের চিত্রটতে 64 টা সম আয়তনের ঘনক এক সঙ্গে যুক্ত হয়ে একটি ঘনক তৈরি হয়েছে।



তোমরা লক্ষ্য করলে দেখবে যে ঘনকটির

দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা = 4 একক

ঘনকটির আয়তন = 64 ঘন একক

= $4 \times 4 \times 4$ ঘন একক

= দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

= দৈর্ঘ্য × দৈর্ঘ্য × দৈর্ঘ্য

= দৈর্ঘ্য^3

উদাহরণ 13 ঃ একটি ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য 7 সেমি হলে ঘনকটির আয়তন কত হবে?

সমাধান ঃ ঘনকটির বাহুর দৈর্ঘ্য = 7 সেমি

ঘনকটির আয়তন = (দৈর্ঘ্য)^3

= (7 সেমি)^3

= 343 ঘন সেমি

উদাহৰণ 14 ঃ 20 সেমি দৈৰ্ঘ্যেৰ একটি বড় ঘনক থেকে 5 সেমি দৈৰ্ঘ্যৰ কতগুলো ঘনক কেটে বেৰ কৰা যাবে?

সমাধান ঃ বড় ঘনকটিৰ দৈৰ্ঘ্যেৰ = 20 সেমি

∴ বড় ঘনকটিৰ আয়তন (v) = (20 সেমি)^3

= 8000 ঘন সেমি

আবাৰ

ছোটো ঘনকটিৰ দৈৰ্ঘ্য = 5 সেমি

ছোটো ঘনকটিৰ আয়তন (v) = (5 সেমি)^3

= 125 ঘন সেমি

কেটে আনতে পাৰা ঘনকেৰ $= \dfrac{\text{বড় ঘনকটিৰ আয়তন}}{\text{ছোট ঘনকটিৰ আয়তন}}$

$= \dfrac{8000}{125}$

$= 64$

11.7 চোঙাৰ আয়তন (Volume of Cylinder):

একই আকাৰে একটা কৰে কিছু মুদ্ৰা সংগ্ৰহ কৰে একটিৰ ওপৰ একটি সাজিয়ে এক থাক কৰলে একটি গোটা চোঙাৰ আকৃতি পাওয়া যায়। এই মুদ্ৰাগুলোৰ মোট আয়তনই হবে চোঙাটিৰ আয়তন। একটি মুদ্ৰা উচ্চতা 1 একক ধৰে নিলে চোঙাটিৰ উচ্চতা হবে মোট মুদ্ৰাৰ উচ্চতাৰ যোগফল। যদি মুদ্ৰাগুলোৰ মোট উচ্চতা h হয়—

চোঙাটিৰ আয়তন = একটি মুদ্ৰাৰ পৃষ্ঠতলেৰ কালি × উচ্চতা

$= \pi r^2 \times h \qquad [\pi = \dfrac{22}{7}]$

মুদ্ৰাটিৰ ব্যাসাৰ্ধ $= r$ ধৰা হয়েছে।

মুদ্ৰাগুলোৰ মোট উচ্চতা $= h$

চোঙাটিৰ আয়তন $= \pi r^2 h$

নীচেৰ তালিকাটি পূৰণ কৰো —

উচ্চতা (h) সেমি	ব্যাস (d) সেমি	ব্যাসাৰ্ধ (r) সেমি	ভূমি পৃষ্ঠেৰ কালি πr^2 বৰ্গ সেমি	চোঙাৰ আয়তন (v) ঘন সেমি
15	14			?
10			44	?
20		0.7		?
?			250	500

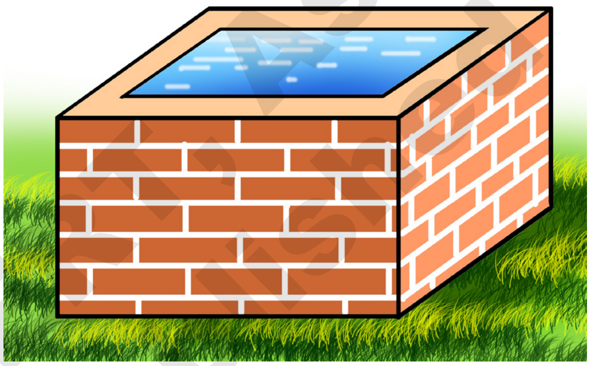
11.8 আয়তন ও ধারণ ক্ষমতা (Volume and Capacity) :

আয়তন ও ধারণ ক্ষমতার মধ্যে সাধারণ পার্থক্য —

একটি বস্তুর আয়তন মানে তা কিছু স্থান অধিকার করে থাকা পরিমাণ।

অন্যদিকে ধারণ ক্ষমতা মানে একটি পাত্রে জুড়ে থাকা বস্তুর আয়তন

একটি উদাহরণের সাহায্যে আয়তন ও ধারণ ক্ষমতার মধ্যের পার্থক্যটুকু বুঝে নিই এসো। চিত্রতে দেখানো ধরণে একটি চৌবাচ্চার বাইরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার মাপ গুণ করলে চৌবাচ্চাটির ধারণ ক্ষমতা পাওয়া যাবে। অতএব চৌবাচ্চাটির ভিতরের জলের পরিমাণ হবে তার ধারণ ক্ষমতা। এক্ষেত্রে চৌবাচ্চাটির আয়তন এর ধারণ ক্ষমতার থেকে বেশি।



চৌবাচ্চাটির চারধার যদি মোটা না হয়, তাহলে চৌবাচ্চাটির আয়তন ও এর ধারণ ক্ষমতা একই হবে বলে ধরে নিয়ে হবে। এই পাঠটিতে আমরা সাধারণত পাত্রের আয়তন এবং পাত্রটির ধারণ ক্ষমতা একই বলে ধরে নেব।

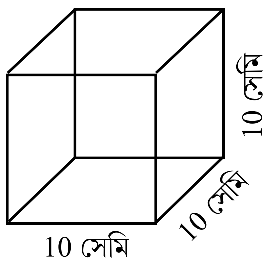
উদাহরণস্বরূপ একটি পাত্রে ভিতরের খালি অংশের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যদি 10 সেমি হয়, তাহলে পাত্রটির ভিতরের আয়তন হবে = 10 সেমি × 10 সেমি × 10 সেমি

= 1000 ঘন সেমি

কিন্তু 1 ঘন সেমি = 1 মিলিলিটার

অতএব, 1000 ঘন সেমি = 1000 মিলি = 1 লিটার

অর্থাৎ এর ধারণ ক্ষমতা হবে = 1 লিটার



জেনে নেই এসো —

1 ঘন সেমি = 1 মিলিলিটার

1000 ঘন সেমি = 1 লিটার

1 ঘন মিটার = 1000 লিটার

বা 1000000 ঘন সেমি = 1000 লিটার

উদাহৰণ 15 ঃ 2 মি × 0.5 মি × 2 মি মাপের একটি আয়তীয় ঘনকের জল ধারণের ক্ষমতা বার করো।

সমাধান ঃ আয়তীয় ঘনকটির আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

$= 2$ মি $\times 0.5$ মি $\times 2$ মি

$= 2 \times \frac{1}{2} \times 2$ ঘন মিটার

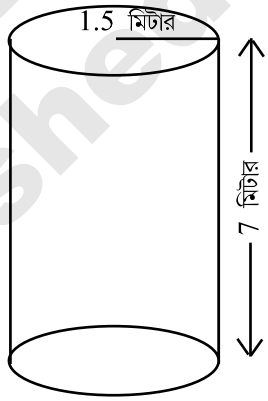
$= 2$ ঘন মিটার

∴ 1 ঘন মিটার আয়তনের পাত্র একটিতে জল ধরে 1000 লিটার

∴ 2 ঘন মিটার আয়তনের পাত্রটিতে জল ধরে, 2×1000 লিটার $= 2000$ লিটার

∴ পাত্রটির ধারণ ক্ষমতা = 2000 লিটার

উদাহৰণ 16 ঃ একটি চোঙাকৃতির দুধের পাত্রের ভিতরের ব্যাসার্ধ 1.5 মি ও দৈর্ঘ্য 7 মিটার। পাত্রটিতে কত লিটার দুধ ভরাতে পারব?



সমাধান ঃ দুধের পাত্রটির ব্যাসার্ধ (r) $= 1.5$ মি

দুধের পাত্রটির দৈর্ঘ্য (h) $= 7$ মিটার

দুধের পাত্রটির আয়তন (v) $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times (1.5)^2 \times 7$ ঘন মিটার

$= 22 \times 2.25$ ঘন মিটার

$= 49.5$ ঘন মিটার

1 ঘন মিটার আয়তনের পাত্রটিতে দুধ ধরে $= 1000$ লিটার

49.5 ঘন মিটার আয়তনের পাত্রটিতে দুধ ধরে $= 1000 \times 49.5$ লিটার

$= 49500$ লিটার

পাত্রটিতে দুধ ধরবে $= 49500$ লিটার

উদাহৰণ 17 ঃ 18 মি × 12 মি × 9 মি মাপের একটি আয়তীয় ঘনক থেকে 3 মিটার দৈর্ঘ্যের কতগুলো ঘনক কেটে বার করা যাবে?

সমাধান ঃ আয়তীয় ঘনকের আয়তন $= 18 \times 12 \times 9$ ঘন মিটার

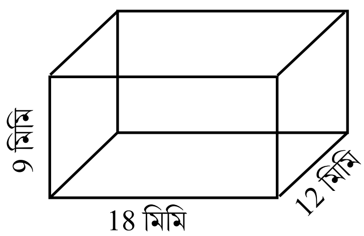
$= 1944$ ঘন মিটার

ঘনকটির দৈর্ঘ্য $= 3$ মিটার

ঘনকটির আয়তন $=$ (দৈর্ঘ্য)^3

$= 3^3$ ঘন মিটার

$= 27$ ঘন মিটার



ঘনকের সংখ্যা $= \dfrac{\text{আয়তীয় ঘনকটির আয়তন}}{\text{প্রতিটি ঘনকের আয়তন}}$

$$= \frac{1944}{27}$$
$= 72$ টি

উদাহৰণ 18 ঃ একটি ঘনকের মোট পৃষ্ঠকালি 96 সেমি^{2} হলে ঘনকটির আয়তন নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ ঘনকের মোট পৃষ্ঠকালি = 96 সেমি^{2}, ঘনকটির একটি পৃষ্ঠের কালি = দৈর্ঘ্য^2

$\therefore$ 6 $\times$ দৈর্ঘ্য^2 = 96

বা দৈর্ঘ্য^2 = $\frac{96}{6} = 16$

$\therefore$ দৈর্ঘ্য = $\sqrt{16}$ = 4 সেমি

$\therefore$ ঘনকটির আয়তন = দৈর্ঘ্য^3

= 4^3 ঘন সেমি

= 64 ঘন সেমি

উদাহৰণ 19 ঃ কয়েকটি 1.5 সেমি ব্যাস ও 0.2 সেমি শক্ত মুদ্রা একসঙ্গে করে একটি লম্ব বৃত্তাকৃতির চোঙা গঠন করা হল যার উচ্চতা 10 সেমি ও ব্যাস 4.5 সেমি। চোঙাটি গঠন করতে ব্যবহার হওয়া মুদ্রার সংখ্যা বের করো।

সমাধান ঃ মুদ্রাটির ব্যাস (d_1) = 1.5 সেমি

মুদ্রাটির ব্যাসার্ধ $(r_1) = \frac{1.5}{2} = 0.75$ সেমি

পুরূতা বা উচ্চতা $(h_1) = 0.2$ সেমি

$\therefore$ মুদ্রাটির আয়তন $= \pi r_1^2 h$

$= \pi \times (0.75)^2 \times 0.2$ ঘন সেমি

আবার চোঙাটির ব্যাস $(d_2) = 4.5$ সেমি

চোঙাটির ব্যাসার্ধ $(r_2) = \frac{4.5}{2} = 2.25$ সেমি

চোঙাটির উচ্চতা $(h_2) = 10$ সেমি

$\therefore$ চোঙাটির আয়তন $= \pi r_2^2 h_2$

$= \pi \times (2.25)^2 \times 10$ ঘন সেমি

$\therefore$ মুদ্রার সংখ্যা = $\frac{\text{চোঙাটির আয়তন}}{\text{মুদ্রা একটির আয়তন}}$

$$= \frac{\pi \times r_1^2 \times h_1}{\pi \times r_2^2 \times h_2}$$

$$= \frac{(2.25)^2 \times 10}{(0.75)^2 \times 0.2}$$

$$= \frac{2.25 \times 2.25 \times 10}{0.75 \times 0.75 \times 0.2}$$

$= 3 \times 3 \times 50$

$= 450$ টা

উদাহৰণ 20 ঃ কোনো নিৰ্দিষ্ট উষ্ণতায় 50 সেমি দৈৰ্ঘ্যৰ ঘনক আকৃতিৰ একটি বৰফেৰ টুকৰোৰ ভৰ কত হবে যদি 1 ঘন মিটাৰ বৰফেৰ ভৰ 900 কিলোগ্ৰাম হয়।

সমাধান ঃ ঘনকটিৰ দৈৰ্ঘ্য $= 50$ সেমি

$= \frac{50}{100}$ মিটাৰ $= \frac{1}{2}$ মিটাৰ

$\therefore$ বৰফেৰ টুকৰোটিৰ আয়তন $= (\frac{1}{2})^3$ ঘন মিটাৰ $= \frac{1}{8}$ ঘন মিটাৰ

দেওয়া আছে, 1 ঘন মিটাৰ বৰফেৰ ভৰ = 900 কিলোগ্ৰাম

$\therefore \frac{1}{8}$ ঘন মিটাৰ বৰফেৰ ভৰ $= \frac{1}{8} \times 900$ কিলোগ্ৰাম

$= 112.5$ কিলোগ্ৰাম

অনুশীলনী 11.3

1. একটি আয়তীয় ঘনক আকৃতিৰ পাত্ৰে 105 লিটাৰ জল ধৰে। যদি পাত্ৰটিৰ ভিতৰেৰ দিকে ভূমিৰ নীচেৰ মাপ 15 মিটাৰ × 3.5 মিটাৰ তবে পাত্ৰটিৰ উচ্চতা কত?
2. একটি 12 সেমি দৈৰ্ঘ্যেৰ বাহুৰ ধাতুৰ ঘনক গলিয়ে তিনটি ছোট ছোট ঘনক তৈৰি কৰা হল। এৰ দুটি ঘনকেৰ বাহুৰ দৈৰ্ঘ্য ক্ৰমে 6 সেমি ও 8 সেমি হলে তৃতীয় ঘনকটিৰ বাহুৰ দৈৰ্ঘ্য বেৰ কৰো
3. একটি আয়তীয় ঘনকেৰ ভূমিৰ কালি 180 বৰ্গ সেমি ও আয়তন 900 ঘন সেমি হলে উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰো।
4. 60 সেমি × 54 সেমি × 30 সেমি মাপেৰ একটি খোলা আয়তীয় ঘনকে 6 সেমি বাহুৰ কতটি ঘনক ভৰানো যাবে?
5. 6 মিটাৰ ব্যাস এবং 21 মিটাৰ গভীৰতাৰ একটি গৰ্ত বানালে কত ঘন মিটাৰ মাটি বাৰ হবে?
6. একটি আয়তীয় ঘনক আকৃতিৰ ট্যাঙ্কিতে প্ৰতি মিনিটে 40 লিটাৰ কৰে জল ভৰানো হয়েছে। যদি ট্যাঙ্কিটিৰ আয়তন 54 ঘন মিটাৰ হয় তবে খালি ট্যাঙ্কিটি কত ঘণ্টায় পূৰ্ণ হবে?
7. 2200 ঘন সেমি ধাতুৰ একটি টুকৰো গলিয়ে 0.5 সেমি ব্যাসেৰ একটি সুষম তাৰ তৈৰি কৰা হল। এই তাৰটিৰ দৈৰ্ঘ্য কত?
8. একটি আয়তীয় ঘনকেৰ আয়তন 440 ঘন সেমি ও এৰ ভূমি তলেৰ কালি 88 সেমি^{2} হলে উচ্চতা কত হবে?
9. একটি আয়তীয় ঘনকেৰ আয়তন 168 ঘন মিটাৰ ও ভূমি পৃষ্ঠেৰ কালি 2800 বৰ্গ সেমি হলে উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰো।

10. একটি আয়তাকৃতির চৌবাচ্চার ভিতরের দৈর্ঘ্য 6 মিটার, প্রস্থ 2 মিটার ও উচ্চতা 1 মিটার হলে চৌবাচ্চাটিতে কত লিটার জল ধরবে?
11. একটি চোঙার ভূমিতলের পরিসীমা 132 সেমি ও উচ্চতা 25 সেমি হলে চোঙাটির আয়তন কত হবে?
12. দুটি সম আয়তনের চোঙার উচ্চতার অনুপাত 1:4 হলে এর ব্যাসার্ধের অনুপাত কত?
13. একটি আয়তীয় ঘনক আকৃতির জলের ট্যাঙ্কের ভেতরের মাপ 4.2 মিটার × 300 সেমি × 1.8 মিটার হলে ট্যাঙ্কটির ধারণ ক্ষমতা লিটারে প্রকাশ করো।
14. একটি গোটা চোঙাকৃতি খুঁটির মোট পৃষ্ঠকালি 924 বর্গ সেমি। খুটিটির বক্রপৃষ্ঠের কালি মোট পৃষ্ঠকালির দুই তৃতীয়াংশ হলে খুটিটির ব্যাসার্ধ ও আয়তন বার করো।

আমরা কী কী শিখলাম

1. একটি ট্র্যাপিজিয়ামের কালি = সমান্তরাল বাহু দুটির যোগফলের অর্ধেক × তাদের লম্ব দূরত্ব।
2. একটি রম্বাসের কালি = কর্ণ দুটির পূরণফলের অর্ধেক।
3. বহুভুজের কালি বের করতে আমরা বহুভুজটির ত্রিভুজ, বর্গ, আয়ত, ট্র্যাপিজিয়াম ইত্যাদি বিভিন্ন ভাগে ভাগ করে নিতে পারি। এই জ্যামিতিক আকৃতিগুলোর কালির যোগফলই হচ্ছে বহুভুজটির কালি।
4. গোটা বস্তুর পৃষ্ঠকালি গোটা বস্তুটির পৃষ্ঠগুলোর কালির সমান।
   (i) আয়তীয় ঘনকের পৃষ্ঠকালি $= 2(lb + bh + lh)$
   (ii) ঘনকের পৃষ্ঠকালি $= 6l^2$
   (iii) দুই মুখ বন্ধ চোঙার পৃষ্ঠকালি $= 2\pi r(r + h)$
   (iv) দুই মুখ খোলা চোঙার পৃষ্ঠকালি $= 2\pi rh$
   (v) একটি মুখ খোলা চোঙার পৃষ্ঠকালি $= 2\pi rh + \pi r^2$
5. আয়তন
   (i) আয়তীয় ঘনকের আয়তন $= l \times b \times h$
   (ii) ঘনকের আয়তন $= l^3$
   (iii) চোঙার আয়তন $= \pi r^2 h$
6. (i) 1 ঘন সেমি = 1 মিলিলিটার
   (ii) 1 লিটার = 1000 মিলিলিটার = 1000 ঘন সেমি
   (iii) 1 ঘন মিটার = 100 সেমি × 100 সেমি × 100 সেমি
   = 1000000 ঘন সেমি
   = 1000000 মিলিলিটার
   = 1000 লিটার

❑❑❑

D4P3N6

অধ্যায়-12

সূচক এবং ঘাত
(Exponents and Powers)

সপ্তম শ্রেণিতে তোমরা সূচক এবং ঘাতের বিষয়ে শিখেছ। তোমরা মনে করো 2^5 -এর অর্থ কী?

$$\begin{aligned} 2^5 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= 32 \end{aligned}$$

2^5 → সূচক

2^5 → ভূমি

2^5 হচ্ছে 32-এর সূচকীয় রূপ

এখানে 5 টা 2 গুণ করা হয়েছে। এই 2 কে ভূমি বলে। 2 -এর ঘাত কী হবে? বলতে পারো? এখানে 2 -এর ঘাত 5 পর্যন্ত উন্নীত করো হল। 5 এ 2 -এর ঘাত বুঝিয়েছে।

এবার 2^{-5} -এর অর্থ কী হতে পারে চিন্তা করো। এখানে (–5) টা 2 গুণ করা হয়েছে বলে বলতে পারো কি? নিশ্চয় পারবে না। কারণ, (–5) টা 2 -এর গুণফল অর্থহীন। এর সূচকটি ঋণাত্মক সংখ্যা।

2^{-5} → সূচক

2^{-5} → ভূমি

এই পাঠে তোমরা ঋণাত্মক সুচকের বিষয়ে লিখতে পারবে।

12.1 ঋণাত্মক সূচকযুক্ত ঘাত (Power with negative exponents)

তোমরা জান যে

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 = \frac{16}{2}$$

$$2^2 = 2 \times 2 = 4 = \frac{8}{2}$$

$$2^1 = 2 = \frac{4}{2}$$

$$2^0 = 1 = \frac{2}{2}$$

এখন ওপরের চিহ্নটি বুঝতে পারলে কি? যখন সূচকের মান 1 করে কমে, তখন তার মান কী হবে লক্ষ্য করো। এখন 2^{-1} -এর মান কত হবে?

ওপরের চিহ্নটি লক্ষ্য করলে দেখবে যে $2^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$

আবার $2^{-2} = \frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2^2}$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^2} \div 2 = \frac{1}{2^2 \times 2} = \frac{1}{2^3}$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^3} \div 2 = \frac{1}{2^3 \times 2} = \frac{1}{2^4}$$

$$2^{-5} = \frac{1}{2^4} \div 2 = \frac{1}{2^4 \times 2} = \frac{1}{2^5}$$ ইত্যাদি।

সেভাবে, $2^{-7} = \frac{1}{2^7}$

$$3^{-19} = \frac{1}{3^{19}}$$

$$5^{-6} = \frac{1}{5^6}$$

$10^{-1} = \frac{1}{10}, 10^{-2} = \frac{1}{10^2}, 10^{-3} = \frac{1}{10^3}$ ইত্যাদি।

একই পদ্ধতিতে তোমরা 10^{-5} -এর মান নির্ণয় করতে পারবে কি?

এখন ভূমি ও সূচক দুটি-ই ঋণাত্মক সংখ্যা হলে কী হবে দেখি এসো।

$(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5}$, $(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4}, (-10)^{-7} = \frac{1}{(-10)^7}$ এগুলোর একই নির্দিষ্ট মান পাবে।

অতএব যেকোনো অখণ্ড সংখ্যা a -র জন্য $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ যেখানে m একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

উদাহরণ 1ঃ $(-3)^{-4}$ এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}$

$$= \frac{1}{81}$$

অর্থাৎ $(-3)^{-4} = \frac{1}{81}$

উদাহরণ 2 ঃ মান নির্ণয় করো

(i) 5^{-4} (ii) $(-5)^{-4}$ (iii) $(-5)^{-3}$ (iv) $(-4)^{-5}$

সমাধান ঃ (i) $5^{-4} = \frac{1}{5^4}$

$= \frac{1}{5\times5\times5\times5}$

$= \frac{1}{625}$

(ii) $(-5)^{-4} = \frac{1}{(-5)^4}$

$= \frac{1}{(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)}$

$= \frac{1}{625}$

(iii) $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3}$

$= \frac{1}{(-5)\times(-5)\times(-5)}$

$= \frac{1}{-125}$

$= -\frac{1}{125}$

(iv) $(-4)^{-5}$

$= \frac{1}{(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)}$

$= \frac{1}{-1024}$

$= -\frac{1}{1024}$

12.2 সূচকের সহায়ে সংখ্যার বিস্তারিত রূপ (Use of exponents to express numbers in expanded from) :

উদাহরণ 3 ঃ 57463 কে বিস্তারিত রূপে লেখো

সমাধান ঃ $57463 = 50000 + 7000 + 400 + 60 + 3$

$= 5 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 6 \times 10 + 3$

বা

$= 5 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0$

উদাহরণ 4 ঃ 57463.812 কে বিস্তারিত রূপে লেখো।

সমাধান ঃ $57463.812 = 50000 + 7000+400+60+3 +0.8 +0.01 +0.002$

$= 50000 + 7000 + 400 + 60 + 3 + \frac{8}{10} + \frac{1}{100} + \frac{2}{1000}$

$= 5 \times 10^4+7\times10^3+4\times10^2+6\times10+3\times10^0+8\times10^{-1}+1\times10^{-2} + 2\times10^{-3}$

12.3 সূচকের বিধি (Laws of Indices)

সূচকের বিধিকয়টি এমন ধরণর

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$

$$\text{(iii)}\quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$\text{(iv)}\quad (a \times b)^m = a^m \times b^m$$

$$\text{(v)}\quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \; b \neq 0$$

$$\text{(vi)}\quad a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

এখন সূচকগুলো ঋণাত্মক হলে বিধিকয়টি শুদ্ধ হবে কি? পরীক্ষা করে দেখি এসো।

কয়েকটি উদাহরণ দেখি এসো

(i) $(-3)^{-5} \times (-3)^{-6}$

সমাধান ঃ $(-3)^{-5} \times (-3)^{-6}$

$$= \frac{1}{(-3)^5} \times \frac{1}{(-3)^6}$$

$$= \frac{1}{(-3)^5 \times (-3)^6}$$

$$= \frac{1}{(-3)^{5+6}}$$

$$= (-3)^{-5+(-6)}$$

(ii) $(-5)^3 \times (-5)^{-7}$

সমাধান ঃ $(-5)^3 \times (-5)^{-7}$

$$= (-5)^3 \times \frac{1}{(-5)^7}$$

$$= \frac{(-5)^3}{(-5)^7}$$

$$= (-5)^{3-7}$$

$$= (-5)^{3+(-7)}$$

(iii) $(-4)^{-5} \times (-4)^6$

সমাধান ঃ $(-4)^{-5} \times (-4)^6$

$$= \frac{1}{(-4)^5} \times (-4)^6$$

$$= \frac{(-4)^6}{(-4)^5}$$

$$= (-4)^{6-5}$$

$$= (-4)^{-5+6}$$

উপরের কয়টি উদাহরণ থেকে কী শিখলে? একই ভূমি বিশিষ্ট দুটি সংখ্যার গুণফলে দুটি সূচক যোগ হয়। অন্য সংখ্যা নিয়েও তোমরা করে দেখ তো। সূত্রটি মিলেছে কি?

অতএব, যেকোনো অশূন্য অখণ্ড সংখ্যা a-র জন্য $a^m \times a^n = a^{m+n}$ যেখানে m ও n অখণ্ড সংখ্যা।

সেভাবে তোমরা সূচকের অন্য বিধিসমূহ পরীক্ষা করে দেখতে পারো a ও b অশূন্য অখণ্ড সংখ্যা এবং m ও n যেকোনো অখণ্ড সংখ্যা। উপরের সূচকের সকল বিধি সত্য হবে।

এখন নীচের গুণফলগুলি লক্ষ্য করো—

$5^3 \times 5^{-3}$

$$= 5^3 \times \frac{1}{5^3}$$

$$= \frac{5^3}{5^3}$$

$$= 1$$

$7^6 \times 7^{-6}$

$$= 7^6 \times \frac{1}{7^6}$$

$$= \frac{7^6}{7^6}$$

$$= 1$$

$2^5 \times 2^{-5}$

$$= 2^5 \times \frac{1}{2^5}$$

$$= \frac{2^5}{2^5}$$

$$= 1$$

ইতিমধ্যে প্রথম অধ্যায়ে দেখেছ যে যদি দুটি সংখ্যার গুণফল 1হয়, তাহলে সংখ্যা দুটির একটিকে অন্যটির গুণাত্মক বিপরীত বা প্রতিক্রম বা অন্যোন্যক বলা হয়।

অর্থাৎ 5^3 গুণাত্মক বিপরীত 5^{-3} এবং 5^{-3} গুণাত্মক বিপরীত 5^3

ঠিক তেমন,

7^6 -এর গুণাত্মক বিপরীত 7^{-6} বেং 7^{-6}-এর গুণাত্মক বিপরীত 7^6ইত্যাদি।

অর্থাৎ a^m -এর গুণাত্মক বিপরীত হবে a^{-m} বা $\frac{1}{a^m}$ যেখানে a ও m দুটি অখণ্ড সংখ্যা এবং $a \neq 0$

উদাহরণ 5 ঃ মান নির্ণয় করো (সূচকের বিধি প্রয়োগ করে)

(i) $(-4)^7 \times (-4)^{-5} \times (-4)^{-2}$ (ii) $(-3)^{-3} \div (-3)^{-2}$

(iii) $(-2)^{-2} \times 3^{-2}$ (iv) $(2^{-2})^{-3}$

সমাধান ঃ

(i) $(-4)^7 \times (-4)^{-5} \times (-4)^{-2}$

$= (-4)^{7+(-5)+(-2)}$ $[a^m \times a^n = a^{m+n}]$

$= (-4)^0$

$= 1$

(ii) $(-3)^{-3} \div (-3)^{-2}$

$= (-3)^{-3-(-2)}$ $[a^m \div a^n = a^{m-n}]$

$= (-3)^{-3+2}$

$= (-3)^{-1}$

$= \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

(iii) $(-2)^{-2} \times 3^{-2}$

$= (-2 \times 3)^{-2}$ $[a^m \times b^m = (a \times b)^m]$

$= (-6)^{-2}$

$= \frac{1}{(-6)\times(-6)}$

$= \frac{1}{36}$

(iv) $(2^{-2})^{-3}$

$= 2^{(-2)\times(-3)}$ $[(a^m)^n = a^{m\times n}]$

$= 2^6$

$= 64$

উদাহরণ 6 ঃ সরল করো (উত্তরগুলি সূচকীয় রূপে রাখবে)

(i) $3^{-7} \times 3^{-4} \times 3^2 \times 3^{-5}$ (ii) $(-7)^{-9} \div (-7)^{-2}$

(iii) $(-4)^{-5} \times (-3)^{-5} \times 2^{-5}$ (iv) $(3^{-5})^{-3}$

সমাধান ঃ

(i) $3^{-7} \times 3^{-4} \times 3^2 \times 3^{-5}$

$= 3^{-7+(-4)+2+(-5)}$

$= 3^{-16+2}$

$= 3^{-14}$

$= \frac{1}{3^{14}}$

(ii) $(-7)^{-9} \div (-7)^{-2}$

$= (-7)^{-9-(-2)}$

$= (-7)^{-9+2}$

$= (-7)^{-7}$

$= \frac{1}{(-7)^7}$

(iii) $(-4)^{-5} \times (-3)^{-5} \times 2^{-5}$

$= \{(-4)\times(-3)\times 2\}^{-5}$

$= (24)^{-5} \quad = \dfrac{1}{24^5}$

(iv) $(3^{-5})^{-3}$

$= 3^{(-5)\times(-3)}$

$= 3^{15}$

উদাহরণ 7 ঃ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4$ এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \left(\dfrac{2}{3}\right)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)$ [4 টি $\left(\dfrac{2}{3}\right)$]

$= \dfrac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3}$

$= \dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$ অতএব, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{16}{81}$

উদাহরণ 8 ঃ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}$ এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^4} = \dfrac{1}{\dfrac{2^4}{3^4}} = \dfrac{3^4}{2^4} = \dfrac{81}{16}$

অতএব, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} = \dfrac{3^4}{2^4} = \dfrac{81}{16}$

অর্থাৎ $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{b^n}{a^n}}$ **বা** $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n}$

উদাহরণ 9 ঃ $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}$ এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^3 = \dfrac{5^3}{2^3} = \dfrac{125}{8}$

উদাহরণ 10 ঃ $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-6}$ কে ধনাত্মক সূচকে পরিবর্তিত করো।

সমাধান ঃ $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-6} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^6$

টীকা সূচকের বিধিসমূহ আগেই তোমরা পেয়েছে। বিধিগুলোতে a এবং b অশূন্য অখণ্ড সংখ্যা এবং m, n যেকোনো অখণ্ড সংখ্যা নেওয়া হয়েছিল। a এবং b পরিমেয় সংখ্যা হলেও এই বিধিগুলো প্রযোজ্য হবে।

যদি a একটি অশূন্য পরিমেয় সংখ্যা হয় তাহলে $a^m \times a^n = a^{m+n}$ যেখানে m, n অখণ্ড সংখ্যা এই বিধিটি শুদ্ধ হবে কিনা পরীক্ষা করে দেখি এসো।

উদাহরণ 11 ঃ $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$ এর মান বের করো।

সমাধান ঃ

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)}_{5\text{ বার}} \times \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)}_{7\text{ বার}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

অর্থাৎ, পরিমেয় সংখ্যার ক্ষেত্রেও সূচকের বিধিটি প্রযোজ্য হয়।

অতএব যেকোনো অশূন্য পরিমেয় সংখ্যা aর জন্য $a^m \times a^n = a^{m+n}$ যেখানে m এবং n অখণ্ড সংখ্যা যেভাবে তোমরা সূচকের বাকি বিধিকয়টিও পরীক্ষা করে দেখতে পারবে যেখানে a এবং b অশূন্য পরিমেয় সংখ্যা।

উদাহরণ 12 ঃ সূচকের বিধি প্রয়োগ করে সরল করো

(i) $\left(\frac{19}{15}\right)^8 \times \left(\frac{19}{15}\right)^{11} \times \left(\frac{19}{15}\right)^{-7}$ (ii) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^7 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^5\right\}$

(iii) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-4} \times \left(-\frac{5}{3}\right)^4 \times \left(-\frac{3}{5}\right)^{-3}$ (iv) $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^5\right\}^{-3}$ (v) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5} \div \left(\frac{4}{3}\right)^8$

সমাধান ঃ

(i) $\left(\frac{19}{15}\right)^8 \times \left(\frac{19}{15}\right)^{11} \times \left(\frac{19}{15}\right)^{-7}$

$= \left(\frac{19}{15}\right)^{8+11+(-7)}$ $[a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}]$

$= \left(\frac{19}{15}\right)^{12}$

(ii) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^7 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^5\right\}$

$= \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^{7-5}\right\}$ $\quad [a^m \div a^n = a^{m-n}]$

$= \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2$

$= \left(-\frac{2}{3}\right)^{2+2}$

$= \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-1.\frac{2}{3}\right)^4 = (-1)^4\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

(iii) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-4} \times \left(-\frac{5}{3}\right)^4 \times \left(-\frac{3}{5}\right)^{-3}$

$= \left(-\frac{3}{5}\right)^{-4} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^{-4} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^{-3}$ $\quad [\because \left(-\frac{5}{3}\right)^4 = \left(-\frac{3}{5}\right)^{-4}$ ভূমিগুলো এক করে নাও]

$= \left(-\frac{3}{5}\right)^{-4+(-4)+(-3)} = \left(-\frac{3}{5}\right)^{-11} = \left(-\frac{5}{3}\right)^{11}$

(iv) $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^5\right\}^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5\times(-3)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-15} = \left(\frac{3}{2}\right)^{15}$

(v) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5} \div \left(\frac{4}{3}\right)^8 = \left(\frac{4}{3}\right)^5 \div \left(\frac{4}{3}\right)^8$

$= \left(\frac{4}{3}\right)^{5-8} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

উদাহরণ 13 ঃ যদি $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^{3k-3}$ তাহলে kর মান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^{3k-3}$

বা, $\left(\frac{2}{3}\right)^{2\times 6} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-(3k-3)}$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$

বা, $\left(\frac{2}{3}\right)^{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3-3k}$

অতএব, $12 = 3 - 3k$ [দুইপক্ষের ভূমি একই অতএব সূচকগুলো সমান হবে]

বা, $3k = 3 - 12$

বা, $3k = -9$

বা, $k = -3$

$\therefore$ kর নির্ণেয় মান -3

অনুশীলনী 12.1

1. মান নির্ণয় করো ঃ

(i) 5^{-3} (ii) $(-4)^{-2}$ (iii) $(-4)^{-3}$

(iv) $\left(-\frac{5}{7}\right)^5$ (v) $\left(-\frac{5}{7}\right)^{-5}$ (vi) $\left(-\frac{1}{3}\right)^8$

2. সূচকীয় রূপে প্রকাশ করো ঃ

(i) $\frac{343}{125}$ (ii) $\frac{1}{288}$ (iii) $-\frac{27}{343}$

(iv) $-\frac{125}{216}$ (v) $-\frac{27}{16\times 49}$ (vi) $\frac{128}{81}$

3. সরল করো ঃ (উত্তরগুলো ধনাত্মক সূচকীয় রূপে রাখবে)

(i) $(-2)^4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^4$ (ii) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^3$

(iii) $5^{-7} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3$ (iv) $3^{-5} \times (-2)^{-5} \times (-4)^{-5}$

4. মান নির্ণয় করো ঃ

(i) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(-\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{7}{9}\right)^2$ (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

(iii) $\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ (iv) $(5^{-1} + 3^{-1} + 7^{-2})^0$

(v) $(5^{-1} \times 2^{-1}) \times 6^{-1}$ (vi) $(3^{-2})^{-3}$

5. নীচে যা দেওয়া হয়েছে তার গুণাত্মক বিপরীত লেখো—

(i) 3^4 (ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ (iii) $\left(-\frac{4}{9}\right)^{50}$

(iv) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$ (v) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-7}$ (vi) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-4}$

6. সরল করো ঃ (সূচকের বিধি ব্যবহার করে)

(i) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)$ (ii) $\left(\frac{5}{3}\right)^0 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-3} \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$

(iii) $\left\{\left(-\frac{5}{3}\right)^{15} \times \left(-\frac{5}{3}\right)^{-8}\right\} \div \left(-\frac{5}{3}\right)^6$ (iv) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-5} \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{-7} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^8 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^4$

(v) $(3^{-4})^{-2} \times (3^{-5})^2 \div (3^{-2})^{-3}$

7. (i) যদি $\left(\frac{5}{7}\right)^{-7} \times \left(\frac{7}{5}\right)^{-9} = \left(\frac{5}{7}\right)^{2m}$ তবে m -এর মান নির্ণয় করো।

(ii) যদি $\left(\frac{9}{49}\right)^{-5} \times \left(\frac{9}{49}\right)^7 = \left(\frac{9}{49}\right)^{-6k}$ তবে k -এর মান নির্ণয় করো।

(iii) যদি $(1.4)^8 \times (1.4)^5 = (1.4)^3 \times (1.4)^k$ তবে k এর মান নির্ণয় করো।

(iv) m -এর মান নির্ণয় করো যাতে $5^m \div 5^{-3} = 5^5$

8. সরল করো

(i) $\dfrac{125 \times 3^{-4} \times 2^2}{5^{-4} \times 100 \times 3^{-7}}$ (ii) $\dfrac{3^{2k} \times 27 \times 9^{-3}}{81^{-2k} \times 3^{-4} \times 3^5}$ (iii) $\dfrac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 125}{5^{-7} \times 6^{-5}}$

(iv) $\dfrac{25 \times l^{-4}}{5^{-3} \times 10 \times l^{-8}}$ $(l \neq 0)$ (v) $\dfrac{2^{m+2} \times 3^{2m-n} \times 6^n}{6^m \times 2^n \times 4 \times 3^m}$

9. বিস্তারিত রূপে প্রকাশ করো ঃ

(i) 15737.348 (ii) 35792.39

12.4 বড়ো সংখ্যাকে প্রামণিক রূপে প্রকাশ (Expressing large numbers in standard form):

একটি সংখ্যাকে বিস্তারিত রূপে কীভাবে প্রকাশ করা যায় তোমরা শিখেছ। সেখানে একক, দশক, শতক ইত্যাদি স্থানে 10-এর ঘাত হিসাবে ক্রমে 10^0, 10^1, 10^2 ব্যবহার করা হয়েছে।

নীচের সংখ্যাকয়টি খেয়াল করো—

$$58 = 5.8 \times 10 = 5.8 \times 10^1$$
$$580 = 5.8 \times 100 = 5.8 \times 10^2$$
$$5800 = 5.8 \times 1000 = 5.8 \times 10^3$$
$$58000 = 5.8 \times 10000 = 5.8 \times 10^4$$
$$580000 = 5.8 \times 100000 = 5.8 \times 10^5$$

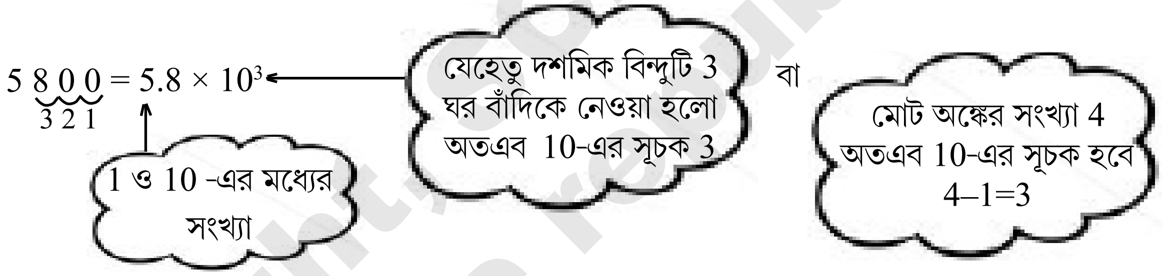
সংখ্যার এমন রূপকে প্রামাণিক রূপ বা বৈজ্ঞানিক রূপ বলা হয়।

5800 কে আমরা বিভিন্ন ধরণে প্রকাশ করতে পারি।

$$5800 = 58 \times 100 = 58 \times 10^2$$
$$5800 = 580 \times 10 = 580 \times 10^1$$
$$5800 = 0.5800 \times 10000 = 0.5800 \times 10^4$$

এগুলো 5800 -র প্রামাণিক রূপ নয়। কিন্তু 5.8×10^3 কে 5800-র প্রামাণিক রূপ বলে।

এই সংখ্যাটিকে আমরা নীচের উল্লেখ করে প্রামাণিক রূপে লিখি এসো



অর্থাৎ বড়ো সংখ্যার প্রামাণিক রূপ হবে $K \times 10^n$

যেখানে $1 \leq K < 10$ এবং n হলো পূর্ণ সংখ্যা। দশমিক বিন্দুটি বাঁদিকে নিয়ে প্রথম অঙ্কের ঠিক পেছনে কত ঘর নেওয়া হয় সেটাই n-এর মান। বা n -এর মান = দশমিকর বাঁদিকে থাকা অঙ্কের সংখ্যা –1।

$5\underbrace{800}$ এর ক্ষেত্রে দশমিক বিন্দুটি তিন ঘর বাঁদিকে নেওয়া হলো অতএব 10-এর সূচক হবে 3। বা 4–1=3 সেভাবে, 47300000 সংখ্যাটির প্রামাণিক রূপ হবে 4.73×10^7।

তোমরা জান যে সূর্য আমাদের থেকে 149600,000,000 মিটার দূরে আছে। এই সংখ্যাটি পড়তেও কঠিন। একে প্রামাণিক রূপে প্রকাশ করি এসো। দশমিক বিন্দুটি ডানদিক থেকে বাঁদিকে প্রথম অঙ্ক 1-এর পাশে আনতে হবে। এখানে মোট অঙ্ক 12 টি অতএব 12–1=11

$$1\underbrace{49600000000}_{11\,10\,9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,1}$$

দেখা গেল যে 11 ঘর আনার পর 1-এর কাছে এল।

অতএব $149600,000,000 = 1.496 \times 10^{11}$

অর্থাৎ আমরা এভাবে বলতে পারি যে সূর্যটি আমাদের থেকে 1.49×10^{11} মিটার দূরে আছে।

লক্ষ করো যে বৃহৎ সংখ্যাগুলো পড়তে কঠিন এবং লিখতেও কঠিন। অতএব একে প্রামাণিক রূপে প্রকাশ করলে বুঝতে সহজ হয়। সঙ্গে পড়তে এবং লিখতেও সহজ হয়। উঁচু শ্রেণিতে তোমরা জানবে যে পৃথিবীর ভর প্রায় 5976000000000000000000000 কি গ্রাম। এই সংখ্যাটি কীভাবে পড়বে? এটি কীভাবে প্রামাণিক রূপে প্রকাশ করতে চিন্তা করো। সংখ্যাটির প্রথম অঙ্কটি 5 , দশমিক বিন্দুটি ডানদিকে থেকে বাঁদিকে অর্থাৎ 5-এর ঠিক পেছনে কত ঘর আনতে হবে গুণে দেখো। 24 ঘর আনতে হবে। অতএব সংখ্যাটির প্রামাণিক রূপ হবে 5.976×10^{24}। অর্থাৎ পৃথিবীর ভর প্রায় 5.976×10^{24} কি গ্রাম।

উদাহরণ 14 ঃ নীচের সংখ্যাগুলো প্রামাণিক রূপে প্রকাশ করো ঃ

(i) 4000,000,000 (ii) 5376.3×10^5

(iii) 0.278×10^5 (iv) 0.00327×10^7

সমাধান ঃ (i) $4000,000,000 = 4 \times 10^9$

(ii) $5376.3 \times 10^5 = 5.3763 \times 10^3 \times 10^5$
$= 5.3763 \times 10^8$

(iii) $$0.278 \times 10^5 = \frac{2.78}{10} \times 10^5 = 2.78 \times 10^{5-1} = 2.78 \times 10^4$$

(iv) $$0.00327 \times 10^7 = \frac{3.27}{1000} \times 10^7 = \frac{3.27}{10^3} \times 10^7 = 3.27 \times 10^{7-3} = 3.27 \times 10^4$$

12.5 ছোট সংখ্যাকে প্রামাণিক রূপে প্রকাশ করতে সূচকের ব্যবহার

বড় সংখ্যাগুলোকে প্রামাণিক রূপে প্রকাশ করার মতো ছোট সংখ্যাগুলোকেও প্রামাণিক রূপে প্রকাশ করা যায়। নীচের সংখ্যাগুলো খেয়াল করো

$$0.1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$$

$$0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$0.001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

$$0.0001 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

$$0.00001 = \frac{1}{100000} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$$ ইত্যাদি।

তোমরা দেখলে যে, $0.00001 = 10^{-5}$ বা 1×10^{-5}

সেভাবে 0.00004-এর প্রামাণিক রূপ কী হবে ভাবে।

$$0.00004 = \frac{4}{100000}$$
$$= \frac{4}{10^5}$$
$$= 4 \times 10^{-5}$$

$\therefore$ 0.00004 -এর প্রামাণিক রূপ 4×10^{-5}

এভাবেও ভাবা যায় যে, দশমিক বিন্দুটি বাঁদিক থেকে ডানদিক পর্যন্ত 5 ঘর এসে 4-এর ডানদিকে বসল। অতএব 10 -এর সূচক –5

$$0\,.\underset{1\;2\;3\;4\;5}{\boxed{0|0|0|0|4}}$$

$$\therefore \quad 0.00004 = 4 \times 10^{-5}$$

সেভাবে 0.000000123র প্রামাণিক রূপ কী হবে? এখানে দশমিক বিন্দুটি 1 -এর ডানদিকে নিয়ে আনতে হবে। কত ঘর আনবে?

$$0\,.\underset{1\;2\;3\;4\;5\;6\;7}{\boxed{0|0|0|0|0|0|1}}\,2\;3$$

নিশ্চয় 7 ঘর আনতে হবে। তাহলে $0.000000123 = 1.23 \times 10^{-7}$

অতএব তোমরা লক্ষ্য করবে যে একটি সংখ্যার (ছোটই হোক বা বড়ই হোক) প্রামাণিক রূপটি হবে $K \times 10^n$ যেখানে $1 \leq K < 10$ এবং n হলো অখণ্ড সংখ্যা।

উদাহরণ 15 ঃ নীচের সংখ্যাগুলোকে প্রামাণিক রূপে প্রকাশ করো।

(i) 0.0000000007 (ii) 0.0000001234

(iii) 0.00000008034 (iv) $\frac{1}{100000000}$

সমাধান ঃ (i) $0.0000000007 = 7 \times 10^{-10}$

(ii) $0.0000001234 = 1.234 \times 10^{-7}$

(iii) $0.00000008034 = 8.034 \times 10^{-8}$

(iv) $\frac{1}{100000000} = \frac{1}{10^8} = 1 \times 10^{-8}$

12.6 বৃহৎ সংখ্যার যোগ ও বিয়োগ (Addition and subtraction of large numbers) :

উদাহরণ 16 ঃ সূর্যগ্রহণের সময় পৃথিবী ও চন্দ্রের মধ্যেকার দূরত্ব 3.844×10^8 মি। চন্দ্র এবং সূর্যের মধ্যেকার দূরত্ব 1.492×10^{11} মি। অতএব পৃথিবী ও সূর্যের মধ্যেকার দূরত্ব কত হবে বের করো।

সমাধান ঃ এই ক্ষেত্রে **প্রামাণিক রূপে থাকা সংখ্যাগুলোকে একই সূচক বিশিষ্ট সংখ্যায় পরিবর্তিত করতে হবে।**

পৃথিবী ও সূর্যের মধ্যে দূরত্ব = পৃথিবী ও চন্দ্রের মধ্যে দূরত্ব + চন্দ্র ও সূর্যের মধ্যে দূরত্ব ।

$\therefore$ পৃথিবী ও সূর্যের মধ্যে দূরত্ব $= 3.844 \times 10^8 + 1.492 \times 10^{11}$ মি

$= 3.844 \times 10^8 + 1.492 \times 10^3 \times 10^8$ মি

$= 3.844 \times 10^8 + 1492 \times 10^8$ মি

$= (3.844 + 1492) \times 10^8$ মি

$= 1495.844 \times 10^8$ মি

$= 1.495844 \times 10^3 \times 10^8$ মি

$= 1.495844 \times 10^{11}$ মি

উদাহরণ 17 ঃ পৃথিবী ও চন্দ্রের ভর ক্রমে = 5.972×10^{24} কিগ্রা এবং 7.352×10^{22} কিগ্রা। কার ভর বেশি? কত বেশি?

সমাধান ঃ এখানে $5.972 \times 10^{24} \rangle 7.352 \times 10^{22}$

এখানে $5.972 \times 10^{24} - 7.352 \times 10^{22}$

$= 5.972 \times 10^2 \times 10^{22} - 7.352 \times 10^{22}$ [প্রতিটি সংখ্যাকে একই সূচক বিশিষ্ট করে নেওয়া হলো]

$= 597.2 \times 10^{22} - 7.352 \times 10^{22}$

$= (597.2 - 7.352) \times 10^{22}$

$= 589.848 \times 10^{22}$

$= 5.89848 \times 10^2 \times 10^{22}$

$= 5.89848 \times 10^{24}$

অতএব পৃথিবীর ভর চন্দ্রের থেকে 5.89848×10^{24} কিগ্রা বেশি।

অনুশীলনী 12.2

1. নীচের সংখ্যাগুলো প্রামাণিক রূপে প্রকাশ করো

   (i) 35700000 (ii) 705030000 (iii) 37800.35

   (iv) 5362.8×10^6 (v) 4003.2×10^5

2. নীচের সংখ্যাগুলো প্রামাণিক রূপে প্রকাশ করো

   (i) 0.0000000382 (ii) 0.00000009057 (iii) 0.00000756

   (iv) 0.00023×10^{-2} (v) 0.000314×10^{-3}

3. নীচের সংখ্যাগুলো সাধারণ রূপে প্রকাশ করো

   (i) 7.02×10^5 (ii) 3.972×10^7 (iii) 1.001×10^8

   (iv) 3×10^{-8} (v) 2.1×10^{-6} (vi) 3.09×10^{-5}

4. নীচের উক্তিগুলোর সংখ্যাগুলো প্রামাণিক রূপে প্রকাশ করো
   (i) আলোর বেগ প্রতি সেকেন্ড 300000 কিমি
   (ii) সূর্য এবং শনির মধ্যেকার দূরত্ব 1,433,500,000,000 মিটার
   (iii) 18 গ্রাম জলে 602,300,000,000,000,000,000,000 সংখ্যক অণু থাকে।
   (iv) কোনো একটি পদার্থের অণুর ব্যাস 0.000000015 সেমি
   (v) একটি ব্যাক্টেরিয়ার আকার 0.0000005 মি
   (vi) একটি মিহি তারের ব্যাস 0.0000032 মি
   (vii) 1 মাইক্রন = $\frac{1}{1000000}$ মি

5. নীচের সংখ্যাগুলো প্রামাণিক রূপে প্রকাশ করে ঊর্ধ্বক্রমে সাজাও
   925×10^4; 94.2×10^5, 875×10^5, 87.5×10^4

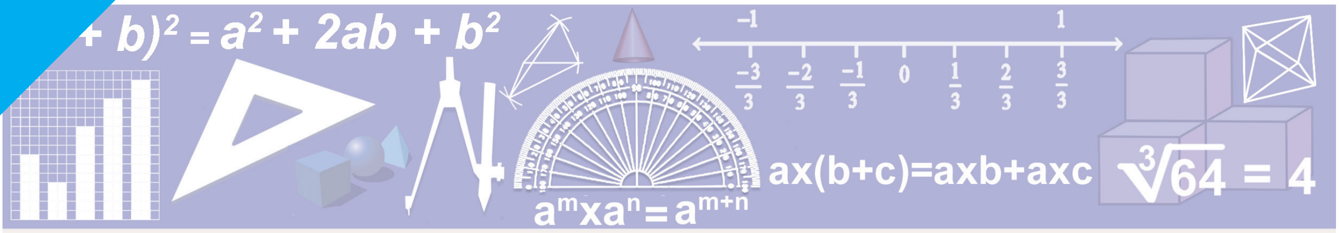
6. যোগ করো
   (i) $3.04 \times 10^{11} + 5.02 \times 10^{10}$
   (ii) $6.03 \times 10^7 + 6.03 \times 10^8$

7. বিয়োগ করো
   (i) $6.47 \times 10^8 - 3.15 \times 10^6$
   (ii) $3.76 \times 10^7 - 3.76 \times 10^5$

1. m, n দুটি অখণ্ড সংখ্যা হলে
   (a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$
   (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$
   (c) $(a^m)^n = a^{mn}$
   (d) $a^m \times b^m = (ab)^m$
   (e) $a^0 = 1$
   (f) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

2. সূচক ব্যবহার করে অতি বড় এবং অতি ছোট সংখ্যাকে প্রামাণিক রূপে লিখতে পারি।

❑❑❑



অধ্যায়-13

প্রত্যক্ষ এবং ব্যস্ত সমানুপাত
(Direct and Inverse Proportion)

F7H6I9

নীচের উদারণগুলো লক্ষ করো—

(a) একটি জল ওঠানোর মেসিন দিয়ে 10 মিনিটে 100 লিটার জল ওঠানো যায়। সেই একই মেশিনের সাহায্যে 20 মিনিটে 200 লিটার জল ওঠানো যায়।

(b) একটি বইয়ের মূল্য 150 টাকা, একই রকম 7টি বইয়ের মূল্য 1050 টাকা।

(c) একজন শ্রমিকের দৈনিক মজুরি 300 টাকা। তিনি 3 দিন কাজ করলে তার মজুরি হবে 900 টাকা।

(d) এক ব্যাগ চালের ওজন 10 কেজি। একই মাপের 4 ব্যাগ চালের ওজন হবে 40 কেজি।

(e) 40 টি কমলার মূল্য 400 টাকা। 20 টি কমলার মূল্য হবে 200 টাকা।

ওপরের উদাহরণগুলো লক্ষ করলে দেখবে যে (a), (b), (c) এবং (d) উদাহরণে একটির পরিমাণ বৃদ্ধি হলে সেই অনুপাতে অন্য বস্তুর পরিমাণও বৃদ্ধি পায়। অন্যদিকে (e) র উদাহরণে কমলার সংখ্যা কমার সঙ্গে সঙ্গে একই অনুপাতে প্রয়োজনীয় টাকাও কমেছে।

আমরা দৈনন্দিন জীবনে এমন অনেক উদাহরণ দেখি, যেখানে একটির পরিমাণ বাড়লে তার সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত অন্যটির পরিমাণও সমান অনুপাতে বাড়ে। তেমনি অন্য একটির পরিমাণ হ্রাস হলে তার সঙ্গে সম্বন্ধিত অন্যটির পরিমাণ সমান অনুপাতে হ্রাস পায়।

কার্য

উদাহরণ (a) র ওপর ভিত্তি করে নীচের তালিকাটি সম্পূর্ণ করো—

সময় (মিনিট)	1	2	3		10		20
জলের পরিমাণ (লিটার)	10	20		50		180	

উদাহরণ (b) র ওপর ভিত্তি করে নীচের তালিকাটি সম্পূর্ণ করো

বইয়ের সংখ্যা	1	2		7	9	12		20
বইয়ের মূল্য	150		750	1050			2100	

অন্য উদাহরণগুলোতেও তোমরা এভাবে নিজেরা সংখ্যা বসিয়ে পূর্ণ করে গণিতের শিক্ষককে দেখাও। এধরণের সমান অনুপাতে বৃদ্ধি বা হ্রাসকে **প্রত্যক্ষ সমানুপাত (Direct proportion) বা প্রত্যক্ষ বিচরণ (Direct Variation)** বলে।

13.1 প্ৰত্যক্ষ সমানুপাত (Direct Proportion)

একটি উদাহরণ ধরা যাক। ধরা হলো দুটি লেবুর মূল্য 10 টাকা, 3 টির মূল্য 15 টাকা, 7 টির মূল্য 35 টাকা, 15 টির মূল্য 75 টাকা ইত্যাদি।

এখন আমরা একটি তালিকা তৈরি করি এসো

লেবুর সংখ্যা (x)	2 (x_1)	3 (x_2)	7 (x_3)	15 (x_4)
খরচ (টাকায়) (y)	10 (y_1)	15 (y_2)	35 (y_3)	75 (y_4)
$\frac{x}{y}$	$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	$\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$	$\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$	$\frac{7}{35}=\frac{1}{5}$

ওপরের তালিকাটিতে আমরা লেবুর সংখ্যাকে x এবং লেবুর মূল্যকে y বলে ধরে নিয়েছি। তালিকাটিতে খেয়াল করো যে লেবুর সংখ্যা বাড়াতে খরচও সমান অনুপাতে বেড়েছে। অন্যদিকে, লেবুর সংখ্যা কমায় মূল্যও সমান অনুপাতে কমেছে। আবার,

$$\frac{x}{y}=\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}=\frac{x_4}{y_4}=\frac{1}{5}$$, একটি ধ্ৰুবক

আমরা যদি $\frac{1}{5}$ কে k দিয়ে চিহ্নিত করি, তাহলে

$$\frac{x}{y}=k \text{ বা } x=ky$$

এধরণের বিচরণকে, যেখানে একটি চলক x-এর বৃদ্ধি অন্য চলক y-এর বৃদ্ধি বোঝায়। (অথবা একটি চলক x-এর হ্রাসে অন্য চলক y -র হ্রাস বোঝায় তেমন বিচরণকে **প্ৰত্যক্ষ বিচরণ** বলে এবং আমরা বলি যে x ও y প্ৰত্যক্ষ সমানুপাতিক। লেখার সময় $x \propto y$ লিখি। পড়ার সময় x প্ৰত্যক্ষ সমানুপাতিক y (x is directly proportional to y) বলে পড়ি এবং এই ক্ষেত্রে $\frac{x}{y}$ একটি ধ্ৰুবক।

ওপরের উদাহরণটিতে $k=\frac{1}{5}$, একটি ধ্ৰুবক (স্থির সংখ্যা)। অন্য উদাহরণে k-র মান ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে।

ওপরের তালিকাটি থেকে লেবুর সংখ্যার পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে আমরা তার মূল্যও নির্ণয় করতে পারি।

তালিকা থেকে:

$$\frac{x}{y}=\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}=\frac{x_4}{y_4}=k=\frac{1}{5}$$

করে দেখো

হিমা ও সীমার বয়সের একটি তালিকা নীচে দেওয়া হল—

	5 বছর আগের বয়স	বর্তমান বয়স	5 বছর পরের বয়স
হিমার বয়স (x)	9	14	19
সীমার বয়স (y)	10	15	20
$\frac{x}{y}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{19}{20}$

এখন দেখো যে ওপরের তালিকাটিতে x বাড়ায় y বেড়েছে কিন্তু $\frac{x}{y}$ ধ্রুবক নয় অর্থাৎ **দুটি চলক একসঙ্গে বৃদ্ধি বা হ্রাস হলেও কিন্তু সমানুপাতিকভাবে না হতেও পারে।**

উদাহরণ 1 ঃ একটি গাড়ি 20 লিটার পেট্রলে 240 কিলোমিটার অতিক্রম করে। গাড়িটি 5 লিটার, 8 লিটার, 12 লিটার এবং 25 লিটার পেট্রলে কতটুকু দূরত্ব অতিক্রম করতে পারবে নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ ধরা হলো, পেট্রলের পরিমাণ x লিটার এবং অতিক্রম করেছে y কিলোমিটার দূরত্ব। এবার নীচের তালিকাটি তৈরি করা যাক .

x (লিটার)	$20(x_1)$	$5(x_2)$	$8(x_3)$	$12(x_4)$	$25(x_5)$
y (কিমি)	$240(y_1)$	y_2	y_3	y_4	y_5

একটি গাড়ি অতিক্রম করা দূরত্ব বৃদ্ধি হলে পেট্রলের খরচও সমান অনুপাতে বৃদ্ধি হয়। অতএব, পেট্রলের খরচ এবং অতিক্রম করা দূরত্ব প্রত্যক্ষ সমানুপাতিক।

অতএব, $\frac{x}{y}=k$ বা $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}=\frac{x_4}{y}=\frac{x_5}{y_5}$

(i) $x_1=20, y_1=240, x_2=5, y_2=?$

এখন $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$

বা $\frac{20}{240}=\frac{5}{y_2}$

বা $\frac{1}{12}=\frac{5}{y_2}$

বা $y_2=12\times5=60$

(ii) $x_3=8, y_3=?$

এখন $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_3}{y_3}$

বা $\frac{20}{240}=\frac{8}{y_3}$

বা $\frac{1}{12}=\frac{8}{y_3}$

বা $y_3=96$

(iii) $x_4 = 12,\ y_4 = ?$

এখন $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_4}{y_4}$

বা $\dfrac{20}{240} = \dfrac{12}{y_4}$

বা $\dfrac{1}{12} = \dfrac{12}{y_4}$

বা $y_4 = 144$

(iv) $x_5 = 25,\ y_5 = ?$

এখন $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_5}{y_5}$

বা $\dfrac{20}{240} = \dfrac{25}{y_5}$

বা $\dfrac{1}{12} = \dfrac{25}{y_5}$

বা $y_5 = 12 \times 25 = 300$

সম্পূর্ণ তালিকাটি নীচে দেওয়া হলো

x (লিটার)	20	5	8	12	25
y (কিমি)	240	60	96	144	300

উদাহরণ 2 . মাধুর্য সাইকেলে 10 মিনিটে 1 কিলোমিটার পথ অতিক্রম করতে পারে। একই গতিতে সে 1 ঘণ্টা 20 মিনিটে কতটুকু পথ যেতে পারবে?

সমাধান ঃ 1 ঘণ্টা 20 মিনিট = (60 + 20) মিনিট

= 80 মিনিট

প্রথম পদ্ধতি ঃ ধরা যাক x ও y ক্রমে সময় এবং অতিক্রম করা দূরত্ব বোঝাচ্ছে। এখন নীচের তালিকাটি লক্ষ করো। সময় বৃদ্ধি হলে অতিক্রম করা দূরত্ব বৃদ্ধি পাবে। অতএব x ও y প্রত্যক্ষ সমানুপাতিক।

সময় (x)	$10(x_1)$	$80(x_2)$
দূরত্ব (y)	$1(y_1)$	y_2

$\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2}$ (অথবা $\dfrac{x}{y} = k$ একটি ধ্রুবক)

বা $\dfrac{10}{1} = \dfrac{80}{y_2}$

বা $10 \times y_2 = 80 \times 1$

বা $y_2 = \dfrac{80}{10} = 8$

$\therefore$ মাধুর্য 1 ঘণ্টা 20 মিনিটে 8 কিলোমিটার দূরত্ব অতিক্রম করবে।

দ্বিতীয় পদ্ধতি (ঐকিক প্রণালী) ঃ

10 মিনিটে অতিক্রম করে 1 কিলোমিটার

$\therefore$ 1 মিনিটে অতিক্রম করে $\frac{1}{10}$ কিলোমিটার

$\therefore$ 80 মিনিটে অতিক্রম করে $\frac{1}{10}\times 80$ কিলোমিটার

$= 8$ কিলোমিটার

তৃতীয় পদ্ধতি ঃ

$\because$ বেশি সময়ে বেশি দূরত্ব অতিক্রম করিব

$\therefore$ এইক্ষেত্রে প্রত্যক্ষ সমানুপাত হবে —

যেহেতু আমাদের দূরত্ব বের করতে হবে এবং বেশি সময়ে বেশি দূরত্ব অতিক্রম করবে

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= 1$ কিমি $\times\frac{80}{10} = 8$ কিমি

(সময়ের অনুপাত $\frac{80}{10}$ দিয়ে গুণ করতে হবে কারণ আমাদের দূরত্ব বাড়াতে অনুপাতটি 1 থেকে বড় হতে হবে।)

উদাহরণ 3 ঃ একটি রেলগাড়ি 18 ঘণ্টাত 720 কিলোমিটার রেলপথ অতিক্রম করতে পারে। সেই গাড়িটি 200 কিলোমিটার অতিক্রম করতে কত ঘণ্টা লাগবে?

সমাধান ঃ প্রথম পদ্ধতি ঃ

ধরা হলো x ও y ক্রমে সময় এবং দূরত্ব অতিক্রম করা বোঝাচ্ছে।

এবার নীচের তালিকাটি প্রস্তুত করি এসো —

সময় (x)	$18(x_1)$	x_2
দূরত্ব (y)	$720(y_1)$	$200(y_2)$

যেহেতু এক্ষেত্রে একটি প্রত্যক্ষ সমানুপাত

$\therefore \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

বা $\frac{18}{720} = \frac{x_2}{200}$

বা $y_2 = \frac{80}{10} = 8 \;\; = 5$

$\therefore$ 200 কিমি অতিক্রম করতে 5 ঘণ্টা লাগবে।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ (ঐকিক প্রণালী)

720 কিলোমিটার যেতে সময় লাগে 18 ঘণ্টা

$\therefore$ 1 কিলোমিটার যেতে সময় লাগে $\frac{18}{720}$ ঘণ্টা

$\therefore$ 200 কিলোমিটার যেতে সময় লাগে $\left(\frac{18}{720}\times 200\right)$ ঘণ্টা = 5 ঘণ্টা

(বেশি সময় বেশি দূরত্ব, কম সময় কম দূরত্ব)

তৃতীয় পদ্ধতি

যেহেতু কম দূরত্ব অতিক্রম করতে কম সময় লাগবে (এইক্ষেত্রে প্রত্যক্ষ সমানুপাত)

এখানে আমাদের সময় বার করতে হবে এবং কম সময় লাগবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $=18\times\frac{200}{720}=5$ ঘণ্টা

(দূরত্বের অনুপাত $\frac{200}{720}<1$ দিয়ে গুণ করতে হবে যেহেতু সময় কমাতে হবে।)

উদাহরণ 4 ঃ 12 টি শক্ত কাগজের ওজন যদি 40 গ্রাম হয়, একই ধরণের কতটি কাগজের ওজন $2\frac{1}{2}$ কিলোগ্রাম হবে?

সমাধান ঃ $2\frac{1}{2}$ কিলোগ্রাম = (2000 + 500) গ্রাম

= 2500 গ্রাম

ধরা হল $2\frac{1}{2}$ কিলোগ্রাম ওজনের জন্য x কতটি কাগজ লাগবে। ওপরের তথ্যগুলো আমরা নীচের তালিকায় দেখাব ঃ

কাগজের সংখ্যা	12	x
কাগজের ওজন	40	2500

কাগজের সংখ্যা বেশি হলে ওজনও বেশি হবে। অতএব প্রত্যক্ষ সমানুপাত।

$\therefore \quad \frac{12}{40}=\frac{x}{2500}$

বা, $\quad 40\times x=12\times 2500$

বা, $\quad x=\frac{12\times 2500}{40}=750$

$\therefore$ বের করতে চলা কাগজের সংখ্যা = 750 খিলা

সংক্ষেপে

নির্ণেয় কাগজের সংখ্যা $= 12 \times \dfrac{2500}{40}$ $\left(\dfrac{2500}{40} > 1,\right.$ বেশি ওজন বেশি কাগজ)

$= 750$ টি

উদাহরণ 5 ঃ

একটি মানচিত্রের সেন্টিমিটার স্কেল এধরনে দেওয়া হয়েছে 1 : 300000 । সেই মানচিত্রে দুটি শহর 4 সেমি দূরত্ব দেখান হয়েছে। তাদের প্রকৃত দূরত্ব কত?

সমাধান ঃ

এখানে $300000 = 3 \times 10^5$

ধরা হলো দূরত্ব x সেমি এবং প্রকৃত দূরত্ব y সেমি

দেওয়া রয়েছে $1 : 300000 = x : y$

বা $\dfrac{1}{3 \times 10^5} = \dfrac{x}{y}$

$\therefore$ $x = 4$ এর জন্য

$\dfrac{1}{3 \times 10^5} = \dfrac{4}{y}$

বা $y = 4 \times 3 \times 10^5$

$= 12 \times 10^5$

$\therefore$ দূরত্ব $= 12$ কিমি ($\therefore$ 10^5 সেমি $= 1$ কিমি)

অনুশীলনী 13.1

1. নীচের তালিকাগুলো পর্যবেক্ষণ করে x ও y প্রত্যক্ষ সমানুপাত হয় কি না বের করো।

i)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

ii)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

iii)

x	5	8	12	15	18	20
y	15	24	36	60	72	100

2. যদি মূলধন 1000 টাকা, সুদের হার বছরে 8% তবে, নীচের তালিকাটি পূর্ণ করো এবং কোনটির ক্ষেত্রে প্রত্যক্ষ সমানুপাত হয় খুঁজে বের করো।

সময়ের মেয়াদ	1 বছর	2 বছর	3 বছর
সরল সুদ (টাকায়)			
চক্রবৃদ্ধি সুদ (টাকায়)			

3. করিমে সাইকেলে ঘণ্টায় 15 কিলোমিটার পথ অতিক্রম করে। সে (i) 3 ঘণ্টায়, (ii) 5 ঘণ্টায়, (iii) 1 ঘণ্টা 20 মিনিটে কতটুকু দূরত্ব অতিক্রম করবে?
4. গড়ে ঘণ্টায় 50 কিলোমিটার গতিতে চলা একটি গাড়িতে জুলুমি 3 ঘণ্টা 15 মিনিটে কাজিরঙা পৌঁছুলো। সে কত দূরের থেকে কাজিরঙা এসেছে?
5. ঘণ্টায় 510 কিলোমিটার গতিতে যাওয়া একটি বিমান 2 ঘণ্টা 20 মিনিটে কত দূরে যেতে পারে?
6. মেরি ঘণ্টায় 4.5 কিলোমিটার দৌড়তে পারে আর গুবপ্রিত 9 মিনিটে 600 মিটার দৌড়তে পারে। কে ঘণ্টায় বেশি দৌড়তে পারে?
7. একটি লঘু পানীয় ফ্যাক্টরির মেশিন 6 ঘণ্টায় 840 টি বোতল ভরে। 5 ঘণ্টা সেটি কতটি বোতল ভরতে পারে?
8. একটি মডেল জাহাজের পালের খুঁটির উচ্চতা 9 সেমি। প্রকৃত জাহাজটির পালের খুঁটির উচ্চতা 12 মি। প্রকৃত জাহাজটির দৈর্ঘ্য যদি 28 মি হয়, তবে মডেল জাহাজটির দৈর্ঘ্য কত হবে?
9. একটি 5 মি 60 সেমি উঁচু উলম্ব স্তম্ভ 3 মি 20 সেমি দৈর্ঘ্যের ছায়া ফেলে। একই সময়ে —
   i) 10 মি 50 সেমি উঁচু একটি স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।
   ii) 5 মি দৈর্ঘ্যের ছায়া ফেলা একটি স্তম্ভের উচ্চতা নির্ণয় করো।
10. লিমসিঙের হাতে রাস্তার একটি মানচিত্র আছে। মানচিত্রের দূরত্ব এবং প্রকৃত দূরত্বের অনুপাত হচ্ছে 1 সেমি . 18 কিমি। সে 72 কিমি গতিতে গাড়ি চলালে মানচিত্রের দূরত্ব কত হবে?

13.2 পরোক্ষ বা ব্যস্ত সমানুপাত (Inverse Proportion)

নীচের উদাহরণগুলো লক্ষ করো—

উদাহরণ 1 . নগাঁও ও গুয়াহাটির মধ্যেকার দূরত্ব 120 কিমি। রমেন গাড়িতে ঘন্টায় 40 কিমি গতিতে নগাঁও থেকে গুয়াহাটি আসতে 3 ঘণ্টা লাগল। আবার ফিরে যেতে ঘন্টায় 60 কিমি গতিতে গেল। সময় লাগল 2 ঘণ্টা। বোঝা গেল, গতিবেগ বাড়ালে কোনো এক নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করতে সময় কম লাগে।

উদাহরণ 2 . কোনো একটি কাজ করতে 5 জন মানুষের 18 দিন লাগে। যদি 10 জন মানুষ কাজটিতে নিয়োগ করা হয়, তাহলে কাজটি 9 দিনে সম্পূর্ণ হবে যায়। অর্থাৎ মানুষ বেশি হলে সময় কম লাগবে।

উদাহরণ 3 . রহদৈ 144 বর্গ মিটার মাপের আয়তাকৃতির একটুকরো মাটি কিনতে চাইলেন। যদি তিনি মাটির এক দিকের দৈর্ঘ্য (ধরা হল x) 12 মিটার নিতে চান, তাহলে অন্য দিকের দৈর্ঘ্য (ধরা হল y) 12 মিটার হবে

(যেহেতু 12 মি × 12 মি = 144 বর্গ মিটার)। আবার তিনি যদি x দৈর্ঘ্যটি কমান, 9 মি নেন, তবে y-র দৈর্ঘ্য বেড়ে 16 মিটার হয়। অন্যদিকে x -এর দৈর্ঘ্য বাড়িয়ে 36 মি নেন তবে y -র দৈর্ঘ্য 4 মি মাত্র পাবেন। কেননা, মাটির পরিমাণ তিনটির ক্ষেত্রে একই থাকবে। অতএব আমরা দেখলাম যে এক নির্দিষ্ট কালির আয়তাকৃতির মাটির জন্য একটি দিকে দৈর্ঘ্য (x) বাড়লে অন্যদিকের দৈর্ঘ্য (y) কমে বা x -এর মান কমলে y র মান বাড়ে।

প্রথম উদাহরণে, দূরত্ব = সময় × গতিবেগ

দূরত্ব ধ্রুবক রেখে গতিবেগ বাড়ালে সময় সমান অনুপাতে কমে, বা সময় বাড়লে গতিবেগ সমান অনুপাতে কমবে।

দ্বিতীয় উদাহরণে একটি নির্দিষ্ট কাজের জন্য মানুষ বাড়লে সময় সমানুপাতিকভাবে কম লাগে। বা মানুষ কমলে সময় সমানুপাতিকভাবে বেশি লাগে।

তৃতীয় উদাহরণে, আয়তাকৃতির মাটির কালি নির্দিষ্ট রেখে একটি দিকের দৈর্ঘ্য বাড়ালে সমান অনুপাতে অন্য টি দিকের দৈর্ঘ্য কমে, বা একটি কমলে অন্যটি বাড়ে।

উদাহরণকয়টি অনুসারে নীচের তালিকাকটি পূর্ণ করো—

তালিকা 1

গাড়ির গতিবেগ (কি মি/ঘ) x	10		20	40	60	80
সময় (ঘ) y	12	8		3	2	
xy	120	120	120		120	120

তালিকা 2

মানুষের সংখ্যা (x)	5	10		18	30	
সময় (দিন) y	18	9	6		3	2
xy	90	90	90	90		90

তালিকা 3

একদিকের দীঘ (x) মি	12	9	36		8	24	
অন্য দিকের দীঘ (y) মি	12	16	4	26		6	3
xy	144	144	144	144	144		144

1 নং তালিকাটিতে গতিবেগকে x বলে ধরে এবং পূর্ণ করতে চলা সময়কে y বলে ধরলে প্রতিটি ক্ষেত্রেই তাদের গুণফল $x \times y$ একটি ধ্রুবক হয়েছে কারণ প্রতিটি ক্ষেত্রেই $x \times y = 120$

সেভাবে দ্বিতীয় ও তৃতীয় তালিকায় ক্রমে মানুষের সংখ্যা এবং সময়ের গুণফল, দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের গুণফলগুলো এক-একটি ধ্রুবক।

ওপরের আলোচনাটিতে আমরা দেখালাম এখানে x এবং y দুটি রাশির একটি বাড়লে অন্যটি সমানুপাতিকভাবে কমে বা একটি কমলে অন্যটি সমানুপাতিকভাবে বাড়ে? এদের গুণফল একটি ধ্রুবক। এরকম ক্ষেত্রে x ও y কে ব্যস্ত সমানুপাতিক বলা হয়। (x is inversely proportional to y)।

$x \propto \frac{1}{y}$ এভাবে লেখা হয়।

বা $xy = k$ (ধ্রুবক)

প্রথম উদাহরণটিতে গতিবেগ (x) এবং সময় (y) যেখানে kর মান 120।

করে দেখো

ধরা যাক একটি বিদ্যালয়ে প্রার্থনার সময় ছাত্র-ছাত্রীকে 10 টি সারিতে সাজানো হলো এবং প্রতিটি সারিতে 40 জন করে ছাত্র-ছাত্রী আছে। এখন সেই একই ছাত্র-ছাত্রীরই সারির সংখ্যা নির্ণয় করো এবং তালিকাটি পূর্ণ করো।

সারির সংখ্যা (x)	10 (x_1)	16 (x_2)	20 (x_3)	8 (x_4)
একটি সারিতে থাকা ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা (y)	40 (y_1)	..... (y_2)	..... (y_3)	..... (y_4)

(i) তালিকাটিতে তোমরা কী দেখলে? x বৃদ্ধি হওয়ায় y হ্রাস হয়েছে কি? অথবা x হ্রাস হওয়ার y বৃদ্ধি হয়েছে কি?

(ii) $x \times y$ প্রতিক্ষেত্রে এক নয় কি?

(iii) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ হয় কি?

(iv) $x_2 : x_3 = y_3 : y_2$ নয় কি?

(v) $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$ নয় কি?

উদাহরণ 1 : নীচের তালিকাগুলো পর্যবেক্ষণ করো এবং চলকের কোণগুলো যেখানে (এখানে x ও y) ব্যস্ত সমানুপাতে আছে বের করো।

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

(iii)

x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	35

সমাধান ঃ

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8
$x \times y$	250	240	210	160

যেহেতু প্রতিটি ক্ষেত্রেই $x \times y$ এক নয়, তাই $x \times y$ একটি ধ্রুবক নয়। এতঅব এই ক্ষেত্রে x ও y ব্যস্ত সমানুপাত নেই।

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15
$x \times y$	6000	6000	6000	6000

যেহেতু প্রতিটি ক্ষেত্রেই $x \times y$ একই, তাই আমরা বলতে পারি যে $x \times y$ একটি ধ্রুবক। অতএব এই ক্ষেত্রে x ও y ব্যস্ত সমানুপাতে আছে।

(iii)

x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	35
$x \times y$	900	900	900	750	600	175

যেহেতু প্রতিক্ষেত্রে $x \times y$ একই নয়, তাই $x \times y$ একটি ধ্রুবক নয়। অতএব এইক্ষেত্রে x ও y ব্যস্ত সমানুপাতে নেই।

উদাহরণ 2 ঃ একটি পেন্সিল বাক্সে থাকা পেন্সিলগুলো 15 জন ছাত্র-ছাত্রীর মধ্যে ভাগ করে দিলে প্রতিজন 8 টি করে পায়। যদি ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা 5 জন বাড়িয়ে দেই, তবে প্রতিজন কয়টি করে পেন্সিল পাবে?

সমাধান ঃ প্রথম পদ্ধতি

ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা বাড়লে জনপ্রতি কমসংখ্যক পেন্সিল পাবে।

$\therefore$ ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা এবং জনপ্রতি প্রাপ্ত পেন্সিলের সংখ্যা ব্যস্ত সমানুপাতিক।

ধরা যাক ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা $= x$

আর প্রতিজন লাভ করা পেন্সিলের সংখ্যা $= y$

এবার নীচের তালিকাটি প্রস্তুত করা হলো

ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা (x)	$15(x_1)$	$20(x_2)$
প্রতিজনে প্রাপ্ত পেন্সিলের সংখ্যা (y)	$8(y_1)$	? (y_2)

যেহেতু x এবং y ব্যস্ত সমানুপাতে আছে

$\therefore \quad x_1y_1 = x_2y_2$

বা, $15 \times 8 = 20 \times y_2$

বা, $y_2 = \dfrac{15\times 8}{20} = 6$

$\therefore$ প্রতিজন ছাত্র-ছাত্রী 6 টি করে পেন্সিল পাবে।

উদাহরণ 3 . 40 কিমি/ঘণ্টা গড় গতিতে গিয়ে একটি বাস $4\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করে। যদি ফিরে আসতে গতিবেগ 45 কিমি/ঘণ্টা হয় তবে বাসটিকে সেটুকু দূরত্ব অতিক্রম করতে কত সময় লাগবে?

সমাধান ঃ খেয়াল করো যে, বেশি গতিবেগে নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করতে কম সময় লাগবে। অতএব রাশি দুটি ব্যস্ত সমানুপাতে আছে।

ধরা যাক বাসটির গতিবেগ $= x$ কিমি/ঘণ্টা

এবং বাস সময় নিয়েছে— $= y$ ঘণ্টা

এবার নীচের তালিকাটি তৈরি করা হল

বাসটির গতিবেগ (x) কিমি/ঘণ্টা	$40(x_1)$	$45(x_2)$
সময় (ঘণ্টা) (y)	$4\frac{1}{2}(y_1)$	$?\ (y_2)$

যেহেতু x ও y ব্যস্ত সমানুপাতিক

বা, $x_1y_1 = x_2y_2$

বা, $40 \times \dfrac{9}{2} = 45 \times y_2$

বা, $\dfrac{9}{2} \times \dfrac{40}{45} = y_2$

বা, $4 = y_2$

বাসটি ফিরে আসতে 4 ঘণ্টায় নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করবে।

উদাহরণ 4 ঃ একজন মানুষ একটি ঘর বানাতে 15 দিন সময় নেন। 3 জন মানুষ সেই ঘরটি কতদিনে তৈরি করবেন।

সমাধান ঃ ধরা হলো মানুষের সংখ্যা= x এবং সময়= y দিন

x	$1(x_1)$	$3(x_2)$
y	$15(y_1)$	? (y_2)

এখানে মানুষ বেশি, অতএব কম সময় লাগবে। তাই x ও y ব্যস্ত সমানুপাতিক।

$\therefore\ x_1y_1 = x_2y_2$

$\Rightarrow y_2 = \frac{1}{3}\times 15 = 5$

$\therefore$ 3 জন মানুষ 5 দিনে কাজটি সম্পূর্ণ করবে।

উদাহরণ 5 ঃ যদি 10 জন মানুষ একটি পুকুর 17 দিনে খনন করতে পারে তবে সেই পুকুরটি 34 জন মানুষ কত দিনে খনন করবে?

সমাধান ঃ

ধরা হলো, শ্রমিকের সংখ্যা= x

এবং সময়= y দিন

x	$10(x_1)$	$34(x_2)$
y	$17(y_1)$	y_2

বেশি সংখ্যক মানুষ, কম দিন লাগবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে x ও y ব্যস্ত সমানুপাতিক।

$\therefore\ x_1y_1 = x_2y_2$

বা, $10\times 17 = 34\times y_2$

বা, $\Rightarrow y_2 = \frac{10\times 17}{34} = 5$

অথবা $\Rightarrow 34y_2 = 10\times 17$

কিংবা $\Rightarrow y_2 = \frac{10\times 17}{34} = 5$

$\therefore$ 34 জন মানুষ 5 দিনে পুকুরটি খনন করতে পারবে।

অনুশীলনী 13.2

1. নীচের উক্তিগুলো ব্যস্ত সমানুপাত কি না লেখো।
   (i) একটি কাজের জন্য প্রয়োজনীয় কর্মীর সংখ্যা এবং কাজটি সম্পূর্ণ করতে প্রয়োজনীয় সময়।
   (ii) একটি নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করতে একটি গাড়ির গতিবেগ এবং সময়।
   (iii) চাষের জমির কালি এবং উৎপাদিত শস্য।
2. একটি গ্রামের জনগণ একটি সর্বজনীন পুকুর কাটার সিদ্ধান্ত নিল। 30 জন শ্রমিক যদি 35 দিনে পুকুরটি কাটতে পারে, তবে 210 জন শ্রমিক কত দিনে সেই কাজটি করতে পারবে?
3. একটি স্বনির্ভরশীল গোষ্ঠীর 15 জন মহিলা 24 দিনে 500 টি গামছা বোনেন। সেই কাজটি (500 টি গামছা) কত দিনে সম্পন্ন হবে, যদি মহিলার সংখ্যা 5, 18 অথবা 24 হয়?
4. একটি খালি চৌবাচ্চা 1 ঘণ্টা 20 মিনিটে পূর্ণ করতে 6 টি নল (Pipe)-এর প্রয়োজন হয়। যদি একই ধরনের 5 টি নল ব্যবহার করা হয়, তাহলে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করতে কত সময়ের প্রয়োজন হবে?
5. একটি 4 কিলোমিটার দীর্ঘ বাঁধ 42 দিনে 120 জন মানুষ তৈরি করতে পারেন। সেই বাঁধটি 30 দিনে সম্পূর্ণ করতে কতজন মানুষের প্রয়োজন হবে?
6. 6 জনের একটি পরিবার যে উপার্জনে 42 দিন চলতে পারে, পরিবারটিতে একজন সদস্য বাড়লে সেই উপার্জনে কত দিন চলতে পারবে?
7. 35 জন মহিলা একটি কাজ 160 দিনে সম্পূর্ণ করতে পারে। তাদের 28 জন মহিলা সেই কাজটি কত দিনে করতে পারবে?
8. দুজন মানুষ 7 দিনে 4 টি নতুন জানালা লাগাতে পারে।
   (i) কাজ আরম্ভ করার আগে তাদের মধ্যে একজন অসুস্থ হলো। কাজটি সম্পূর্ণ করতে বাকি লোকের কতদিন লাগবে?
   (ii) একদিনে জানালাগুলো লাগাতে কতজন মানুষের প্রয়োজন?

বহুবিকল্প প্রশ্ন (MCQ) ঃ

1. যদি x এবং y প্রত্যক্ষ সামানুপাতে থাকে, তাহলে নীচের কোনটি শুদ্ধ

   a) $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ b) $x_1y_1 = x_2y_2$ c) $x_1x_2 = y_1y_2$ d) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$
2. যদি $x_1 = 4, y_1 = 10, x_2 = 2$ এবং x, y প্রত্যক্ষ সমানুপাতে থাকে, তবে $y_2 =$?
   a) 20   b) 5   c) 25   d) 10
3. যদি x ও y পরোক্ষ সমানুপাতিক, তাহলে নীচের কোনটি শুদ্ধ
   a) x বাড়লে y বাড়ে   b) x কমিলে y কমে
   c) x বাড়লে y কমে   d) উপরের একটিও শুদ্ধ নয়।

4. যদি 5 টি বইয়ের ওজন 4 কিগ্রা, তাহলে তেমন 8 টি বইয়ের ওজন কত হবে?

a) 5 কিগ্রা b) 6 কিগ্রা c) 6.4 কিগ্রা d) 10 কিগ্রা

5. 10 জন মানুষ একটি গর্ত খনন করতে 6 ঘণ্টা লাগে। 12 ঘণ্টায় গার্তটি খুড়তে কতজন মানুষ প্রয়োজন হবে।

a) 20 b) 5 c) 7 d) 15

6. একজন মানুষের একটি কাজ সম্পূর্ণ করতে 6 দিন লাগে। তাহলে 2 জন মানুষ একদিনে কাজটির কত অংশ সম্পূর্ণ করবে?

a) $\frac{1}{3}$ অংশ b) $\frac{1}{6}$ অংশ c) $\frac{1}{2}$ অংশ d) $\frac{1}{12}$ অংশ

7. 36 জন মানুষ একটি কাজ 20 দিনে সম্পূর্ণ করে। 12 জন মানুষ সেই কাজটি কত দিনে করবে?

a) $\frac{20}{3}$ দিনে b) 40 দিনে c) 60 দিনে d) 8 দিনে

8. একটি কেণ্টিনে 300 জন মানুষের 20 দিনের খাদ্য আছে। যদি 50 জন মানুষ কমে যায় তবে সেই খাবারে কত দিন চলবে?

a) 120 দিন b) 17 দিন c) 25 দিন d) 24 দিন

1. দুটি রাশি x ও y কে প্রত্যক্ষ সমানুপাতিক বলা হবে, যদি তাদের হ্রাস বা বৃদ্ধির অনুপাতের মান অপরিবর্তনীয় বা ধ্রুবক হয়, অর্থাৎ $\frac{x}{y} = k$ [যেখানে k একটি ধনাত্মক সংখ্যা]। তখন x ও yর প্রত্যক্ষভাবে পরিবর্তন হয়েছে বলা হয়। এমন ক্ষেত্রে যদি x-দুটির মান x_1, x_2, yর অনুরূপ মান ক্রমে y_1, y_2 হয় তাহলে $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ হবে।

2. দুটি রাশি x ও y কে ব্যস্ত সমানুপাতিক বলা হয় যদি x-এর মান বৃদ্ধি হলে y-র মান সমানুপাতিকভাবে হ্রাস হয় এবং বিপরীত ক্রমে x-এর মান হ্রাস হলে yর মান সমানুপাতিকভাবে বৃদ্ধি হয়। এক্ষেত্রে তাদের ক্রমিক মানগুলোর গুণফল একটি ধ্রুবক হয়। অর্থাৎ যদি $xy = k$ তাহলে x ও y কে ব্যস্ত সমানুপাতিক বলা হয়। এক্ষেত্রে যদি x-এর দুটি মান x_1, x_2-র জন্য yর অনুরূপ মান y_1, y_2 হয় তাহলে $x_1 y_1 = x_2 y_2$ বা $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ হবে।

❑❑❑

অধ্যায়-14

বীজগণিতীয় রাশির উৎপাদক বিশ্লেষণ (Factorisation of Algebraic Expression)

W7L4J5

তোমরা স্বাভাবিক সংখ্যার উৎপাদকের বিষয়ে আগেই শিখে এসেছ। যেমন —

$105 = 1 \times 105 = 3 \times 35 = 5 \times 21 = 7 \times 15 = 3 \times 5 \times 7$

এখানে 105 সংখ্যাটিকে পাঁচধরণে আলদা আলাদা সংখ্যার গুণফলে প্রকাশ করা হয়েছে। এভাবে কোনো একটি সংখ্যাকে অন্য দুই বা ততোধিক সংখ্যার গুণফলে প্রকাশ করলে পরের সংখ্যাকয়টি আগের সংখ্যাটির **উৎপাদক (Factor)** বলা হয়। অতএব 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35 এবং 105 এই সবগুলো সংখ্যাই 105-এর উৎপাদক। এক্ষেত্রে লক্ষ্য করো যে 3, 5, 7 উৎপাদক তিনটির প্রতিটিই একেকটি মৌলিক সংখ্যা। অর্থাৎ এদের একটিকে 1-র বাইরে সংখ্যাটি থেকে ছোট অন্য কোনো সংখ্যার গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা যায় না।

অর্থাৎ 105-এর উৎপাদক হিসাবে 3, 5 এবং 7 অলঘুকরণীয় (Irreducible)।

অন্য ধরণে বলতে গেলে $105 = 3 \times 5 \times 7$, 105-এর মৌলিক উৎপাদকের প্রকাশিত রূপ।

মৌলিক উৎপাদকে সংখ্যার প্রকাশ গণিতের বিভিন্ন আলোচনার জন্য প্রয়োজনীয়।

আমরা জানি যে বীজগণিতীয় রাশিগুলো বিভিন্ন পদের যোগ বা বিয়োগের দ্বারা গঠিত হয়। এই পদগুলো আবার বিভিন্ন সংখ্যা, ধ্রুবক এবং বীজগণিতীয় চিহ্ন বা চলকের গুণের দ্বারা গঠিত। যেমন, $10x^2y+6y^2+12y$ একটি বীজগণিতীয় রাশি যেখানে $10x^2y$, $6y^2$ এবং $12y$ রাশিটির তিনটি পদ। অর্থাৎ এটি একটি বহুপদী (ত্রিপদী) বীজগণিতীয় রাশি। এই রাশিটিকে অন্য দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় রাশির গুণ হিসেবে প্রকাশ করা যাবে কি? অর্থাৎ $10x^2y+6y^2+12y$ রাশিটির উৎপাদক পাওয়া সম্ভব কি? যদি সম্ভব হয়, তাহলে উৎপাদকগুলো কেমন হবে? এই প্রশ্নের উত্তর পেতে হলে প্রথমে বীজগণিতীয় রাশির উৎপাদক কীভাবে গঠন হয় তা বিচার করে দেখি এসো।

14.1 বীজগণিতীয় রাশির উৎপাদক (Factorisation of Algebraic Expression)

ওপরের আলোচিত রাশিটির প্রথম পদটি অর্থাৎ $10x^2y$ নেওয়া যাক। এই রাশিটি কত রকম আলাদা আলাদা রাশির গুণফল হিসেবে পেতে পারি দেখো—

$10x^2y = 10 \times x^2y$

অতএব $10x^2y$র 10 ও x^2y দুটি উৎপাদক

অতএব $10 = 2 \times 5$ ও $x^2y = x^2 \times y$

এখানে, $10x^2y = 10 \times x^2y = 2 \times 5 \times x^2 \times y$

অর্থাৎ, $10x^2y$ -র উৎপাদক 2, 5, x^2 ও y

আমরা $x^2 = x \times x$

অতএব $10x^2y = 2\times5\times x\times x\times y$

অর্থাৎ $10x^2y$ র উৎপাদক $2, 5, x, x$ ও y

এখন $10x^2y$র উৎপাদক হিসাবে 2 ও 5 মৌলিক সংখ্যা অর্থাৎ 2 ও 5 রাশিটির অলঘুকরণীয় উৎপাদক।

একইভাবে $10x^2y$র উৎপাদক হিসাবে x ও y ও অলঘুকরণীয় অর্থাৎ, x বা yকে অন্য কোনো রাশির গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা সম্ভব নয়।

অতএব, $10x^2y = 2\times5\times x\times x\times y$, রাশিটির অলঘুকরণীয় উৎপাদকের গুণফলের প্রকাশিত রূপ।

লক্ষ্য করো যে (i) $10x^2y = 10 \times x^2y$ না লিখে আমরা $10x^2y = 10x\times xy$ বা $2\times5x^2\times y$ বা $2x\times5xy$ ইত্যাদি ধরণে লিখতে পারতাম। তখন $10x, xy, 2, 5x^2, y, 2x, 5xy$ ইত্যাদি $10x^2y$র উৎপাদক হিসাবে পেতাম। কিন্তু এই উৎপাদকগুলোর ভিতর $10x, 5x^2, 2x, 5xy$ ইত্যাদির আবার লঘুকরণ সম্ভব হতো। কিন্তু এমন উৎপাদকগুলোকে লঘু করে গেলে শেষে $10x^2y$-র অলঘুকরণীয় উৎপাদক $2, 5, x, x$ ও y কে পেতাম।

(ii) $10x^2y = 1\times10x^2y$ হিসাবে প্রকাশ করা যায়। কিন্তু 1 যেকোনো রাশিতে গুণের দ্বারা যুক্ত হয়ে থাকে। অতএব 1 কে $10x^2y$র উৎপাদক হিসাবে উল্লেখ করার প্রয়োজন নেই।

একই ভাবে, প্রদত্ত রাশিটির দ্বিতীয় পদটি অর্থাৎ $6y^2$ টি যদি লক্ষ করো, দেখবে যে $6y^2$র অলঘুকরণীয় উৎপাদকের গুণফলে প্রকাশিত রূপটি হলো—

$6y^2 = 6\times y^2 = 2\times3\times y\times y$

রাশিটির তৃতীয় পদটি অর্থাৎ $12y$র অলঘুকরণীয় উৎপাদকের গুণফলে প্রকাশ করা রূপটি হল—

$12y = 12\times y = 4\times3\times y = 2\times2\times3\times y$

প্রদত্ত রাশিটির পদ তিনটির প্রত্যেকটিকে অলঘুকরণীয় উৎপাদকের গুণফলে প্রকাশ করায় আমাদের কি সুবিধা হল তাহলে?

আমরা দেখলাম যে 2 এবং y তিনটি পদেই উৎপাদক হিসাবে আছে। অর্থাৎ, $2\times y = 2y$ তিনটি পদের সাধারণ উৎপাদক। যেমন—

$$\begin{aligned}
10x^2y &= 2\times5\times x\times x\times y\\
&= (2\times y)\times(5\times x\times x)\\
&= 2y\times5x^2\\
6y^2 &= 2\times3\times y\times y\\
&= (2\times y)\times(3\times y)\\
&= 2y\times3y\\
12y &= 2\times2\times3\times y\\
&= (2\times y)\times(2\times3)\\
&= 2y\times6
\end{aligned}$$

অতএব প্রদত্ত রাশিটিকে আমরা এভাবে সাজাতে পারি—

$10x^2y+6y^2+12y = 2y\times5x^2+2y\times3y+2y\times6$

ডানদিকের রাশিটির পদ তিনটির ক্ষেত্রে $2y$ তিনিটি পদেরই সাধারণ উৎপাদক। অন্যদিকে, $5x^2$, $3y$ এবং6 রাশিগুলোর পদ তিনটির সাধারণ উৎপাদক নয়।

এখন একটি পরীক্ষা করে দেখি এসো।

পদ তিনটির সাধারণ উৎপাদক যেগুলি নয় সেগুলিকে যোগ করে সাধারণ উৎপাদকটি দিয়ে গুণ করো।

$2y \times (5x^2 + 3y + 6)$

যোগের ওপরে গুণের বিতরণ ধর্ম প্রয়োগ করলে আমরা পাই—

$$\begin{aligned} 2y \times (5x^2+3y+6) &= 2y \times 5x^2 + 2y \times 3y + 2y \times 6 \\ &= 2 \times 5x^2 \times y + 2 \times 3 \times y \times y + 2 \times 6 \times y \\ &= 10x^2y + 6y^2 + 12y \end{aligned}$$

এখানে ডানদিকের রাশিটি আমাদের প্রথমের আলোচিত রাশিটিই নয় কি?

অতএব দেখা গেল যে প্রদত্ত রাশিটি দুটি রাশি $2y$ এবং $5x^2+3y+6$র গুণফল।

অর্থাৎ $10x^2y + 6y^2 + 12y = 2y \times (5x^2+3y+6)$

$$= 2 \times y \times (5x^2+3y+6)$$

অতএব 2, y ও $5x^2+3y+6$ রাশিগুলো প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক হিসাবে অলঘুকরণীয়।

দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় রাশিকে গুণ করে নতুন রাশি গঠন করা কৌশল সম্পর্কে আমরা আগের পাঠে শিখেছি। আমাদের পরবর্তী আলোচনায় যেকোনো একটি রাশি অন্য দুই বা ততোধিক রাশির বিশেষ করে অলঘুকরণীয় রাশির গুণফল হিসাবে কীভাবে পেতে পারি সে বিষয়ে আলোচনা করা হবে।

একটি বীজগণিতীয় রাশিকে অন্য দুই বা ততোধিক অলঘুকরণীয় রাশির গুণফলে প্রকাশ করাকে রাশিটির উৎপাদক বিশ্লেষণ বলা হয়।

এর পরের আলোচনায় , যদি বিশেষভাবে উল্লেখ করা না থাকে তবে, বীজগণিতীয় রাশির উৎপাদক বললে **অলঘুকরণীয়** উৎপাদককেই বুঝতে হবে।

14.2 গরিষ্ঠ সাধারণ উৎপাদক (Highest Common Factor)

দুটি রাশি $3xy$ ও $2x^2y$ র প্রতিপ্রেক্ষিতে কথাগুলো আলোচনা করে দেখি এসো।

প্রথমে আমরা প্রত্যেকটি রাশির উৎপাদক বিশ্লেষণ করে দেখি

$3xy = 3 \times x \times y$

$2x^2y = 2 \times x \times x \times y$ [রাশি দুটির অলঘুকরণীয় উৎপাদকে প্রকাশিত রূপ]

এখন, $3xy$র উৎপাদকগুলো $1, 3, x, y, 3x, 3y, xy, 3xy$.

$2x^2y$র উৎপাদকগুলো $1, 2, x, x^2, y, 2x, 2y, 2x^2, xy, x^2y, 2xy, 2x^2y$.

অতএব, $3xy$ ও $2x^2y$র সাধারণ উৎপাদকসমূহ $1, x, y, xy$.

এইক্ষেত্রে xy উৎপাদকটি $3xy$ ও $2x^2y$ এবং সাধারণ উৎপাদকের মধ্যে সবচেয়ে বড় উৎপাদক। অর্থাৎ $3xy$ এবং $2x^2y$ গ সা গু xy।

অন্য একটি উদাহরণ $12ab^2$ ও $14ab^3$

$$12ab^2 = 2 \times 2 \times 3 \times a \times b \times b$$
$$14ab^3 = 2 \times 7 \times a \times b \times b \times b$$

$\therefore$ $12ab^2$ ও $14ab^3$র গ সা গু হচ্ছে $2 \times a \times b \times b = 2ab^2$

অর্থাৎ রাশি দুটির গ সা গু পেতে সাধারণ উৎপাদকদুটিকে গুণ করা হয়েছে।

একই ভাবে pq এবং abc র গ সা গু কী হবে দেখি এসো

$$pq = p \times q$$
$$abc = a \times b \times c$$

pq ও abc র কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই।

কিন্তু, আমরা জানি যে 1 প্রত্যেকটি রাশিরই একটি উৎপাদক।

অতএব 1 সংখ্যাটি pq ও abc র সাধারণ উৎপাদক হবে। একমাত্র উৎপাদক হওয়ার জন্যই তা গ সা উ হবে।

নিজে চেষ্টা করো (Try Yourself) গরিষ্ঠ সাধারণ উৎপাদক বের করো

(i) a^2 ও a^3 (ii) p^2q ও pq^2 (iii) $3a^3b^2$ ও $6a^2b^3$

(iv) $24l^2mn$ ও $36l^2m^3p$ (v) $18x^2yz^2$, $24x^3y^3z$ ও $20x^2y$ (v) a ও b

একটি কৌশল দেখি এসো

(i) x ও x^2র গ সা গু হচ্ছে x

(ii) a^4 ও a^3র গ সা গু হচ্ছে a^3

(iii) p^6 ও p^2র গ সা গু p^2

কী শিখলে?

একই চলকযুক্ত দুটি বীজগণিতীয় রাশির গ সা গু হচ্ছে ক্ষুদ্রতম ঘাতের রাশিটি।

14.3 বীজগণিতীয় রাশির উৎপাদক বিশ্লেষণ

বীজগণিতীয় রাশির উৎপাদক বিশ্লেষণের জন্য আমরা কিছু পদ্ধতি আলোচনা করি এসো

14.3.1 সাধারণ উৎপাদকের পদ্ধতি (Method Common Factors)

এই পদ্ধতিটিতে প্রদত্ত বীজগণিতীয় রাশিটির সাধারণ উৎপাদকটি বেছে বের করা হয়। তারপর বিতরণ ধর্ম $a \times b + a \times c = a \times (b + c)$ ব্যবহার করে উৎপাদকে প্রকাশ করা হয়। কয়েকটি উদাহরণ দেখি এসো।

উদাহৰণ 1 ঃ উৎপাদক বিশ্লেষণ করো $3x + 6$

সমাধান ঃ $3x = 3 \times x$

$6 = 3 \times 2$

$3x$ ও 6 র গ সা গু হচ্ছে 3

অতএব, $3x + 6 = 3 \times x + 3 \times 2$

$= 3 \times (x + 2)$ $\qquad$ [$a \times b + a \times c = a\times (b+c)$ প্রয়োগ করে]

অর্থাৎ, $3x + 6 = 3(x + 2)$

উদাহৰণ 2 ঃ উৎপাদক বিশ্লেষণ করো $3xy + 3x$

সমাধান ঃ $3xy + 3x$

$= 3x \times y + 3x \times 1$

$= 3x(y+1)$

উদাহৰণ 3 ঃ $12a^2b + 3ab^2$ র উৎপাদক বিশ্লেষণ করো

সমাধান ঃ $12a^2b = 2 \times 2 \times 3 \times a \times a \times b$

$3ab^2 = 3 \times a \times b \times b$

$12a^2b$ ও $3ab^2$ র গ সা গু হচ্ছে $3 \times a \times b = 3ab$

$12a^2b + 3ab^2$

$= 3ab \times 4a + 3ab \times b$

$= 3ab(4a+b)$

উদাহৰণ 4 ঃ $12a^3b^2 - 15a^2b^3$ র উৎপাদক বিশ্লেষণ করো

সমাধান ঃ $12a^3b^2 = 2 \times 2 \times 3 \times a \times a \times a \times b \times b$

$15a^2b^3 = 3 \times 5 \times a \times a \times b \times b \times b$

$12a^3b^2$ ও $15a^2b^3$ গ সা গু $= 3 \times a \times a \times b \times b$

$= 3a^2b^2$

অতএব,

$12a^3b^2 - 15a^2b^3$

$= 3a^2b^2 \times 4a - 3a^2b^2 \times 5b$

$= 3a^2b^2 (4a - 5b)$

সংক্ষেপে,

$12a^3b^2 - 15a^2b^3$

$= 3 \times 2 \times 2\, a^3b^2 - 3 \times 5 \times a^2 b^3$

$= 3a^2b^2(4a - 5b)$

উদাহৰণ 5 ঃ $10a^2b^3 - 12a^3b^2 + 18ab^2$ র উৎপাদক বিশ্লেষণ করো

সমাধান ঃ $10a^2b^3 - 12a^3b^2 + 18ab^2$

$= 2ab^2(5ab - 6a^2 + 9)$

লক্ষ করো

(i) 10, 12 ও 18 র গ সা গু 2

(ii) a^2, a^3 ও a র গ সা গু a

(iii) b^3 ও b^2 র গ সা গু b^2

অতএব $10a^2b^3$, $12a^3b^2$ ও $18ab^2$ র গ সা গু $2ab^2$

উদাহরণ 6 ঃ $3pq^2 + 15pq + 7p^2q$ র উৎপাদক বিশ্লেষণ করো

সমাধান ঃ $3pq^2 + 15pq + 7p^2q$

$= pq \times 3q + pq \times 15 + pq \times 7p$ [লক্ষ করো যে pq হচ্ছে $3pq^2$,$15pq$ এবং $7p^2q$ র গ সা গু]

$= pq \times (3q + 15 + 7p)$

$= pq(3q + 15 + 7p)$

নিজে চেষ্টা করো

উৎপাদক বিশ্লেষণ করো ঃ

(i) $2xy + 2y$ (ii) $10x^2y^3 - 15xy^3$

14.3.2 বীজগণিতীয় রাশি থাকা পদকে উপযুক্ত ক্রমে সাজিয়ে উৎপাদক বিশ্লেষণ (Factorisation by regrouping terms)

কখনো কখনো বীজগণিতীয় রাশিতে থাকা পদসমূহকে উপযুক্ত ক্রমে সাজিয়ে উৎপাদক বিশ্লেষণ করা হয়। নীচের উদাহরণগুলো খেয়াল করো—

উদাহরণ 7 ঃ $ab + ay + xb + xy$ র উৎপাদক বিশ্লেষণ করো।

লক্ষ করো যে রাশিটির প্রথম দুটি পদ ab ও ay র সাধারণ উৎপাদক হচ্ছে a।

অন্যদিকে, xb ও xy র সাধারণ উৎপাদক হচ্ছে x। কিন্তু সবগুলো পদে 1র বাইরে সাধারণ উৎপাদক একটিও নেই। আমরা কীভাবে এগোব?

প্রথমে আমরা সাধারণ উৎপাদক থাকা পদসমূহকে উৎপাদক রূপে লিখি এসো

$$ab + ay = a \times b + a \times y$$
$$= a \times (b + y)$$
$$= a(b + y)$$

সেভাবে,
$$xb + xy = x \times b + x \times y$$
$$= x \times (b + y)$$
$$= x(b+y)$$

এখন
$$ab + ay + xb + xy$$
$$= a(b + y) + x(b + y)$$ [যেহেতু $(b + y)$ সাধারণ উৎপাদক, আমরা বিতরণ বিধি প্রয়োগ করতে পারি]
$$= (b + y)(a + x)$$

লক্ষ করো যে $ab + ay + xb + xy$ $= ab + xb + ay + xy$ [রাশিগুলোর পুনরায় সাজান]

$= b(a + x) + y(a + x)$

$= (a + x)(b + y)$ র উৎপাদক বিশ্লেষণ করো।

উদাহরণ 8 ঃ $3xy + 2y + 3x + 2$ র উৎপাদক বিশ্লেষণ করো।

লক্ষ করো যে এই রাশিটিতে প্রথম এবং দ্বিতীয় পদে y র বাইরে কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই। সেভাবে $3x$ ও 2 রও 1 -এর বাইরে কোনো সাধারণ উৎপাদক নাই।

সমাধান ঃ $3xy + 2y + 3x + 2 = y(3x + 2) + 1\,(3x + 2) = (3x + 2)\,(y + 1)$

অন্য ধরণে $3xy + 2y + 3x + 2$

$= 3xy + 3x + 2y + 2$

$= 3x\,(y + 1) + 2(y + 1)$

$= (y + 1)\,(3x + 2)$

উদাহরণ 9 ঃ $15xy - 6x + 5y - 2$ র উৎপাদক বিশ্লেষণ করো।

সমাধান ঃ $15xy - 6x + 5y - 2$

$= 3 \times x \times 5 \times y - 3 \times x \times 2 + 5 \times y - 2$

$= 3x \times (5y - 2) + 1 \times (5y - 2)$

$= (5y - 2)\,(3x + 1)$

অথবা,

$15xy - 6x + 5y - 2$

$= 15xy + 5y - 6x - 2$

$= 5y \times 3x + 5y \times 1 + (-2) \times 3x + (-2)$

$= 5y\,(3x + 1) + (-2)\,(3x + 1)$

$= (3x + 1)\,[5y + (-2)]$

$= (3x + 1)\,(5y - 2)$

নিজে চেষ্টা করো

নীচের রাশিগুলোর উৎপাদক বিশ্লেষণ করো ঃ

(i) $x^2 + xy + 4x + 4y$ (ii) $5xy + 5y + 2x + 2$

(iii) $px + qx - py - qy$ (iv) $x - 3 + 3yz - xyz$

14.3.3 অভেদ ব্যবহার করে উৎপাদক বিশ্লেষণ (Factorisation using identities)

ইতিমধ্যে তোমরা নীচের অভেদসমূহ পেয়ে এসেছ

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

এই অভেদগুলো ব্যবহার করেও আমরা উৎপাদক বিশ্লেষণ করতে পারি। তার জন্য উৎপাদক বিশ্লেষণ করতে দেওয়া বীজগণিতীয় রাশিটি ওপরের কোন অভেদের সঙ্গে দুপক্ষেই মেলে বা মেলাতে পারি সেটা আমাদের শনাক্ত করতে হবে। শনাক্ত করার পর বাঁ হাতের অনুরূপ রাশিটিই হচ্ছে প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক। কয়েকটি উদাহরণ দেখি এসো।

উদাহরণ 10 ঃ $25x^2 - 30x + 9$ র উৎপাদক বিশ্লেষণ করো

সমাধান ঃ $25x^2 - 30x + 9$

$= (5x)^2 - 2 \times (5x) \times 3 + 3^2$

$= (5x - 3)^2$

$= (5x - 3)(5x - 3)$

লক্ষ্য করো যে প্রদত্ত রাশিটি $a^2 - 2ab + b^2$ নমুনার যেখানে $a = 5x$ ও $b = 3$, $2ab = 2 \times 5x \times 3$

উদাহরণ 11 ঃ উৎপাদক বিশ্লেষণ করো $9a^2 - 81b^2$

সমাধান ঃ $9a^2 - 81b^2$

$= (3a)^2 - (9b)^2$

$= (3a + 9b)(3a - 9b)$

$= 3(a + 3b)\ 3(a - 3b) = 9\ (a + 3b)\ (a - 3b)$

$= 9\ (a^2 - 9b^2)$

$= 9\ \{a^2 - (3b)^2\}$

$= 9\ (a + 3b)\ (a - 3b)$

উদাহরণ 12 ঃ উৎপাদক বিশ্লেষণ করো $16a^4 - 81$

সমাধান ঃ $16a^4 - 81$

$= (4a^2)^2 - 9^2$

$= (4a^2 + 9)(4a^2 - 9)$

$= (4a^2 + 9)\ \{(2a)^2 - 3^2\}$

$= (4a^2 + 9)(2a + 3)(2a - 3)$

উদাহরণ 13 ঃ $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$ র উৎপাদক বিশ্লেষণ করো

সমাধান ঃ $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

$= a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$

$= a^2 - (b - c)^2$

$= \{a + (b - c)\}\{a - (b - c)\}$

$= (a + b - c)(a - b + c)$

নিজে চেষ্টা করো

নীচের রাশিগুলোর উৎপাদক বিশ্লেষণ করো ঃ

(i) $a^2 + 12a + 36$ (ii) $p^4 + 8p^2 + 16$ (iii) $m^2 + 144 - 24m$

(iv) $16x^2 + 49 - 56x$ (v) $x^2 - 25$ (vi) $x^8 - m^8$

14.3.4 $x^2 + px + q$ নমুনার রাশির উৎপাদক বিশ্লেষণ(Factorisation of expressions of the type $x^2 + px + q$)

$x^2 + 3x + 2$, $x^2 + 9x + 14$, $x^2 - 5x + 6$, $x^2 - 6x - 8$ ইত্যাদি রাশিগুলো লক্ষ করো।

রাশিগুলো $x^2 + px + q$ র নমুনায়, যেখানে x র সহগকে p ও q দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে। এই রাশিগুলি আমাদের জানা $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ বা $a^2 - b^2$ -এর সূত্রে নমুনায় প্রকাশ করা যায় না। এসো, এরকম সূত্রে থাকা বীজগণিতীয় রাশিগুলোর উৎপাদক বিশ্লেষণ করে দেখি।

আমরা জানি যে $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)\ x + ab$ যেখানে a ও b ধ্রুবক।
a এবং b র যোগফল তথা a এবং b র গুণফলও একেকটি ধ্রুবক।

ধরা যাক $a + b = p$ ও $ab = q$

$\therefore\quad x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + px + q$

উল্‌টো করে, $x^2 + px + q$ র উৎপাদক বিশ্লেষণ করতে আমাদের এমন দুটো সংখ্যা চাই যার যোগফল x -এর সহগের সমান এবং গুণফল ধ্রুবক রাশিটির সমান হয়।

এসো আমরা কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে বুঝতে চেষ্টা করি।

উদাহরণ 14 ঃ উৎপাদকে প্রকাশ করো $x^2 + 7x + 12$

সমাধান ঃ ওপরের রাশিটিতে $p = 7$ ও $q = 12$

আমরা এমন দুটি সংখ্যা a ও b বেছে বার করতে চাই যার গুণফল 12 এবং যোগফল 7

অর্থাৎ $a \times b = 12$, $a + b = 7$ হবে। তার জন্য নীচের বিশেষণগুলো দেখি এসো

$$1 \times 12 = 12,\quad 1 + 12 = 13$$
$$2 \times 6 = 12,\quad 2 + 6 = 8$$
$$3 \times 4 = 12,\quad 3 + 4 = 7$$

অতএব আমরা দুটি উৎপাদক a ও b ক্রমে 3 এবং 4 নেব। কারণ 3 এবং 4 -এর যোগফল x -এর সহগ 7-এর সমান। আর 3 ও 4 -এর গুণফল ধ্রুবক রাশি 12-এর সমান। 3 ও 4 ছাড়া অন্য কোনো উৎপাদকের জোড় পাই না, যা এই সম্বন্ধটি মেনে চলে। অতএব,

$$\begin{aligned} & x^2 + 7x + 12 \\ &= x^2 + (3 + 4)x + 3 \times 4 \\ &= x^2 + 3x + 4x + 3 \times 4 \\ &= x(x + 3) + 4(x + 3) \\ &= (x + 3)(x + 4) \end{aligned}$$

$\therefore$ $x^2 + 7x + 12$র উৎপাদক বিশ্লেষণ হব $(x + 3)(x + 4)$

উদাহরণ 15 ঃ উৎপাদকে প্রকাশ করো $x^2 - 5x + 6$

সমাধান ঃ ওপরের রাশিটিতে $p = -5$ ও $q = 6$

আমাদের এমন দুটি সংখ্যা বার করতে হবে যাতে তাদের গুণফল 6 এবং যোগফল – 5 হয়।

6 -এর উৎপাদকগুলো দেখি এসো

$$1 \times 6 = 6 \qquad 1 + 6 = 7$$
$$2 \times 3 = 6 \qquad 2 + 3 = 5$$

কিন্তু এভাবে এগোলে আমরা কখনই যোগফল ঋণাত্মক পাব না। তাই আমরা অন্যভাবে চিন্তা করি এসো—

$$(-1) \times (-6) = 6 \quad (-1) + (-6) = -7$$
$$(-2) \times (-3) = 6 \quad (-2) + (-3) = -5$$

দেখা গেল যে – 2 এবং – 3 যোগ করলে – 5 পাব। অতএব,

$$x^2 - 5x + 6$$
$$= x^2 - 2x - 3x + 6$$
$$= x(x - 2) - 3(x - 2)$$
$$= (x - 2)(x - 3)$$

$\therefore$ $x^2 - 5x + 6$ র উৎপাদক বিশ্লেষণ হল $(x - 2)(x - 3)$

উদাহরণ 16 ঃ উৎপাদকে প্রকাশ করো $x^2 + 8x - 20$

সমাধান ঃ এই রাশিটিতে $p = 8$ ও $q = -20$

এমন দুটি সংখ্যা a এবং b আমাদের বার করতে হবে যার যোগফল 8 এবং গুণফল – 20 হয়। খেয়াল রাখতে হবে যে যেহেতু সংখ্যা দুটির গুণফলটি একটি ঋণাত্মক সংখ্যা, অতএব a এবং b র যেকোনো একটি ঋণাত্মক সংখ্যা হবে।

এবার আমরা তালিকার সাহায্যে খুঁজি এসো

a	b	$a \times b$	$a + b$
– 1	20	– 20	19
1	– 20	– 20	– 19
2	– 10	– 20	– 8
– 2	10	– 20	8
4	– 5	– 20	– 1
– 4	5	– 20	1

ওপরের তালিকাটি থেকে পাওয়া যায় যে – 2 এবং 10 -এর জন্য যোগফল $(-2) + 10 = 8$ এবং গুণফল $(-2) \times 10 = -20$।

অতএব, $x^2 + 8x - 20$
$$= x^2 - 2x + 10x - 20$$
$$= x(x - 2) + 10(x - 2)$$
$$= (x - 2)(x + 10)$$

উদাহরণ 17 ঃ উৎপাদকে প্রকাশ করো $x^2 - 5x - 24$

সমাধান ঃ a ও b বার করো যাতে

$a + b = -5$ ও $ab = -24$

তালিকাটি লক্ষ্য করো

a	b	$a \times b$	$a + b$
24	– 1	– 24	23
– 24	1	– 24	– 23
2	– 12	– 24	– 10
– 2	12	– 24	10
3	– 8	– 24	– 5
– 3	8	– 24	5
– 6	4	– 24	– 2
6	– 4	– 24	2

$$x^2 - 5x - 24$$
$$= x^2 + 3x - 8x - 24$$
$$= x(x + 3) - 8(x + 3)$$
$$= (x + 3)(x - 8)$$

উদাহরণ 18 ঃ $x^2 + 3x - 108$ কে উৎপাদকে প্রকাশ করো।

সমাধান ঃ তালিকার সাহায্য না দিয়ে অভ্যাস করি এসো

$$x^2 + 3x - 108$$
$$= x^2 + (12 - 9)x - 108$$
$$= x^2 + 12x - 9x - 108$$
$$= x(x + 12) - 9(x + 12)$$
$$= (x + 12)(x - 9)$$

শিক্ষকদের প্রতি ঃ ছাত্র-ছাত্রীদের প্রথমে তালিকা তৈরি করে উৎপাদক বের করে শেখাতে পারেন। পরে অভ্যস্ত হয়ে গেলে মুখে মুখে করতে পারবে।

নিজে চেষ্টা করো

নীচের রাশিগুলোর উৎপাদক বিশ্লেষণ করো ঃ

(i) $x^2 + 7x + 10$	(ii) $x^2 - 7x + 10$	(iii) $x^2 - 7x - 10$
(iv) $x^2 + 11x + 24$	(v) $x^2 - 15x + 36$	(vi) $x^2 - 20x - 64$

14.3.5 $mx^2 + px + q$ সূত্রে রাশির উৎপাদক বিশ্লেষণ (Factorisation of expressions of the type $mx^2 + px + q$)

ইতিমধ্যে তোমরা $x^2 + px + q$ আকারের রাশির উৎপাদক বিশ্লেষণের বিষয়ে জানলে। যেখানে x^2 র সহগ 1। এইবার আমরা এমন কিছু বীজগণিতীয় রাশির উৎপাদক বিশ্লেষণ দেখব যেগুলোর x^2 র সহগ 1 ছাড়া অন্য সংখ্যা থাকে।

একটি উদাহরণ নেই এসো $15x^2 + 11x + 2$

এই রাশিটির উৎপাদক বিশ্লেষণ করতে আমরা আগের $x^2 + px + q$ আকারের রাশির ক্ষেত্রে করার মতো করে দুটি সংখ্যা a এবং b দেখব, যাতে $a + b = 11$ এবং $ab = 15 \times 2 = 30$

পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে আমরা $a = 6$ এবং $b = 5$ পাই।

অর্থাৎ, $15x^2 + 11x + 2 = 15x^2 + 6x + 5x + 2$
$$= 3x(5x + 2) + (5x + 2)$$
$$= (5x + 2)(3x + 1)$$

নীচের গুণটি লক্ষ্য করো ঃ

$$
\begin{aligned}
& (ax + b)(cx + d) \\
&= ax(cx + d) + b(cx + d) \\
&= acx^2 + adx + bcx + bd \\
&= acx^2 + (ad + bc)x + bd \\
&= mx^2 + px + q
\end{aligned}
$$

যেখানে $m = ac$

$p = ad + bc$

$q = bd$

খেয়াল করো $m \times q = ac \times bd = ad \times bc$

$\therefore$ m ও q গুণফলটি ad এবং bc র গুণফলের সমান এবং p অর্থাৎ x -এর সহগ ad ও bc র যোগফলের সমান।

অর্থাৎ $mx^2 + px + q$ র উৎপাদক বিশ্লেষণ করতে আমাদের এখন দুটি সংখ্যা লাগবে যার গুণফল mq (অর্থাৎ x^2 -এর সহগ এবং ধ্রুবক রাশির গুণফল)-এর সমান হয় আর সেই সংখ্যা দুটির যোগফল x -এর সহগের সমান হয়।

কয়েকটি উদাহরণ দেখি এসো—

উদাহরণ 19 ঃ $2x^2 + 9x + 9$ -এর উৎপাদক বিশ্লেষণ করো।

সমাধান ঃ

$$
\begin{aligned}
& 2x^2 + 9x + 9 \\
&= 2x^2 + (3 + 6)x + 9 \\
&= 2x^2 + 3x + 6x + 9 \\
&= x(2x + 3) + 3(2x + 3) \\
&= (2x + 3)(x + 3)
\end{aligned}
$$

x^2 র সহগ 2 ও ধ্রুবক রাশি 9 র গুণফল $2 \times 9 = 18$

a	b	ab	$a + b$
2	9	18	11
3	**6**	**18**	**9**
1	18	18	19

উদাহরণ 20 ঃ $4m^2 + 25m - 21$ -এর উৎপাদক বিশ্লেষণ করো।

সমাধান ঃ

$$
\begin{aligned}
& 4m^2 + 25m - 21 \\
&= 4m^2 + 28m - 3m - 21 \\
&= 4m(m + 7) - 3(m + 7) \\
&= (m + 7)(4m - 3)
\end{aligned}
$$

m^2 -র সহগ 4 এবং ধ্রুবক রাশি -21 -এর গুণফল $4 \times (-21) = -84$

যেহেতু গুণফলটি ঋণাত্মক। অতএব a ও b র যেকোনো একটি ঋণাত্মক হতে হবে।

উদাহরণ 21 ঃ $6x^2 - 20x - 16$ -এর উৎপাদক বিশ্লেষণ করো।

সমাধান ঃ $6x^2 - 20x - 16$

$= 6x^2 - 24x + 4x - 16$

$= 6x(x - 4) + 4(x - 4)$

$= (x - 4)(6x + 4)$

$= 2(x - 4)(3x + 2)$

বৈকল্পিকভাবে $6x^2 - 20x - 16$

$= 2[3x^2 - 10x - 8]$

$= 2[3x^2 - 12x + 2x - 8]$

$= 2[3x(x - 4) + 2(x - 4)]$

$= 2[(x - 4)(3x + 2)]$

$= 2(x - 4)(3x + 2)$

উদাহরণ 22 ঃ $56y - 3 - 221y^2$ -এর উৎপাদক বিশ্লেষণ করো।

সমাধান ঃ $56y - 3 - 221y^2$

$= -221y^2 + 56y - 3$ [$mx^2 + px + q$ সূত্রে সাজিয়ে নিয়ে]

$= -(221y^2 - 56y + 3)$

$= -[221y^2 - (39 + 17)y + 3]$

$= -[221y^2 - 39y - 17y + 3]$

$= -[13y(17y - 3) - 1(17y - 3)]$

$= -(17y - 3)(13y - 1)$

নিজে চেষ্টা করো

নীচের রাশিগুলোর উৎপাদক বিশ্লেষণ করো

(i) $6x^2 + 5x + 1$ (ii) $2x^2 + 6x + 4$ (iii) $3a^2 + 2a - 8$

(iv) $4b^2 - 2b - 6$

অনুশীলনী 14.1

1. নীচের রাশিগুলোর উৎপাদক বিশ্লেষণ করো

   (i) $3x^2y + 5xy$ (ii) $10x^2y - 5xy^2$ (iii) $7a^2bc - 21ab^2c + 14abc$

2. উৎপাদকে প্রকাশ করো

   (i) $a^2 + ab + 6a + 6b$ (ii) $a^2 + bc + ab + ac$ (iii) $1 + x + x^2 + x^3$

   (iv) $ab + a + b + 1$ (v) $4ax + 3ay - 4bx - 3by$

3. উৎপাদকে প্রকাশ করো

   (i) $x^2 - 36$ (ii) $9x^2 + 30x + 25$ (iii) $16a^2 - 88a + 121$

   (iv) $11x^2 - 44$ (v) $x^4 - 81$ (vi) $4 - x^2 - y^2 + 2xy$

   (vii) $x^8 - y^8$ (viii) $a^3 - ab^2 - a^2b + b^3$

4. উৎপাদকে প্রকাশ করো

   (i) $16 + 8x + x^2$ (ii) $15 - 2x - x^2$ (iii) $x^2 + 8x - 20$

   (iv) $x^2 + 2x - 3$ (v) $a^2 - 4a - 12$ (vi) $x^2 - 21x + 104$

   (vii) $2x^2 + 18x + 40$ (viii) $l^2 - 13l + 42$ (ix) $-a^2 - a + 20$

5. নীচের রাশিগুলোর উৎপাদক বিশ্লেষণ করো

(i) $3x^2 + 8x + 4$ (ii) $2m^2 + 7m + 3$ (iii) $2p^2 + p - 28$

(iv) $9a^2 + 21a - 8$ (v) $4y^2 + 25y - 21$ (vi) $3m^6 - 6m^4n - 45m^2n^2$

(vii) $1 - x - 6x^2$ (viii) $6a^2 + 7ab - 3b^2$

6. শূন্য স্থান পূর্ণ করো (নিরীক্ষণ করে)

(i) $9x^2 + 15x + 4 = (3x + ...) (.... + 1)$

(ii) $12y^2 - 17y + 6 = (.... - 2) (4y - ....)$

(iii) $6m^2 - m - 15 = (3m ....) (2m ....)$

14.4 বীজগণিতীয় রাশির ভাগ (Division of Algebraic Expression)

ইতিমধ্যে তোমরা বীজগণিতীয় রাশির যোগ, বিয়োগ এবং গুণ কীভাবে করা হয় শিখে এসেছ। এই খণ্ডে বীজগণিতীয় রাশিকে অন্য একটি রাশি দিয়ে কীভাবে ভাগ করা যায় তা আলোচনা করা হয়েছে।

আমরা জানি যে ভাগ হচ্ছে গুণের বিপরীত প্রক্রিয়া।

যেমন $7 \times 8 = 56$ অতএব $56 \div 7 = 8$ বা $56 \div 8 = 7$

একইভাবে, বীজগণিতীয় রাশির ক্ষেত্রেও আমরা একই ধরণে এগোতে পারি

(i) $4x \times 3x = 12x^2$ অতএব $12x^2 \div 4x = 3x$ অথবা $12x^2 \div 3x = 4x$

(ii) $6x^2 + 7x + 2 = (3x + 2)(2x + 1)$ অতএব $(6x^2 + 7x + 2) \div (3x + 2) = 2x + 1$

অথবা, $(6x^2 + 7x + 2) \div (2x + 1) = 3x + 2$

(iii) $3x + 2 = 1 \times (3x + 2)$, অতএব $(3x + 2) \div (3x + 2) = 1$ ও $(3x + 2) \div 1 = (3x + 2)$ ইত্যাদি।

আমরা বিস্তৃতভাবে আলোচনা করি এসো।

14.4.1 একপদী রাশিকে একপদী রাশির দ্বারা ভাগ (Division of a mononomial by another mononomial

উদাহরণ ঃ (i) $4x^3 \div 2x$

সমাধান ঃ $4x^3 \div 2x$

$$= \frac{4x^3}{2x} \qquad [\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ বিধি ব্যবহার করে}]$$

$$= 2.x^{3-1}$$

$$= 2x^2$$

(ii) $-30x^4 \div 5x^2$

সমাধান ঃ $\frac{-30x^4}{5x^2}$

$$= \frac{-6 \times 5 \times x^4}{5 \times x^2}$$

$$= -6x^{4-2} = -6x^2$$

(iii) $34x^3y^3z^3 \div 51xy^2z^3$

সমাধান ঃ $\dfrac{34x^3y^3z^3}{51xy^2z^3}$

$= \dfrac{2\times17\times x^3y^3z^3}{3\times17\times xy^2z^3}$

$= \dfrac{2}{3}x^{3-1}y^{3-2}z^{3-3}$

$= \dfrac{2}{3}x^2y^1z^0$

$= \dfrac{2}{3}x^2y$ $\quad [\because z^0 = 1]$

(iv) $39p^2q^3r \div 26p^4qr^2$

সমাধান ঃ $\dfrac{39p^2q^3r}{26p^4qr^2}$

$= \dfrac{13\times3\times p^2q^3r}{13\times2\times p^4qr^2}$

$= \dfrac{3}{2}p^{2-4}q^{3-1}r^{1-2} \qquad = \dfrac{3}{2}p^{-2}q^2r^{-1}$

$= \dfrac{3q^2}{2p^2r}$

নিজে চেষ্টা করো

(i) $48y^3 \div 12y$ (ii) $-35a^3 \div 5a$ (iii) $19x^2y^3 \div 7xz$

(iv) $28p^4 \div 56p$ (v) $12a^8b^8 \div (-6a^6b^4)$

14.4.2 বহুপদ রাশিকে একপদী রাশি দ্বারা ভাগ (Division of a polynomial by a mononomial)

কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে বুঝতে চেষ্টা করি এসো—

উদাহরণ ঃ (i) $(12x^2 - 6x) \div 3x$

সমাধান ঃ $12x^2 - 6x = 6x(2x-1)$ (বিতরণ বিধি প্রয়োগ করে)

$\therefore\ (12x^2 - 6x) \div 3x = \dfrac{6x(2x-1)}{3x}$

$= 2(2x-1)$

নাইবা,

$$(12x^2 - 6x) \div 3x$$
$$= (12x^2 - 6x) \times \frac{1}{3x}$$
$$= 12x^2 \times \frac{1}{3x} - 6x \times \frac{1}{3x} \quad \text{(বিতরণ বিধি প্রয়োগ করে)}$$
$$= \frac{12x^2}{3x} - \frac{6x}{3x}$$
$$= 4x - 2 \quad = 2(2x - 1)$$

(ii) $8(x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3) \div 2x^2y^2z^2$

সমাধান ঃ $8(x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3)$

$$= 8x^2y^2z^2(x + y + z)$$

$$\therefore\ 8(x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3) \div 2x^2y^2z^2$$
$$= \frac{8x^2y^2z^2(x+y+z)}{2x^2y^2z^2}$$
$$= 4(x + y + z)$$

নাইবা,

$$8(x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3) \div 2x^2y^2z^2$$
$$= 8(x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3) \times \frac{1}{2x^2y^2z^2}$$
$$= \frac{8x^3y^2z^2}{2x^2y^2z^2} + \frac{8x^2y^3z^2}{2x^2y^2z^2} + \frac{8x^2y^2z^3}{2x^2y^2z^2} \quad \text{(বিতরণ বিধি প্রয়োগ করে)}$$
$$= 4x + 4y + 4z$$
$$= 4(x + y + z)$$

14.4.3 বহুপদ রাশিকে বহুপদী রাশি দ্বারা ভাগ (Division of a polynomial by a polynomial)

উদাহরণ 1 ঃ $5x^2 + 15x$কে $x + 3$ দিয়ে ভাগ

সমাধান ঃ প্রথমে আমরা $5x^2 + 15x$ কে উৎপাদক বিশ্লেষণ করব।

$$5x^2 + 15x$$
$$= 5x(x + 3)$$

এবার

$$(5x^2 + 15x) \div (x + 3)$$
$$= \frac{5x(x+3)}{(x+3)} \quad = 5x$$

উদাহৰণ 2 ঃ $4m^2 + 4m - 15$কে $(2m - 3)$ দিয়ে ভাগ

সমাধান ঃ $4m^2 + 4m - 15$কে উৎপাদক বিশ্লেষণ করলে পাব

$$
\begin{aligned}
& 4m^2 + 4m - 15 \\
&= 4m^2 + (10 - 6)m - 15 \\
&= 4m^2 + 10m - 6m - 15 \\
&= 2m \times 2m + 5 \times 2m - 3 \times 2m - 3 \times 5 \\
&= 2m \times (2m + 5) - 3\,(2m + 5) \\
&= (2m + 5)\,(2m - 3)
\end{aligned}
$$

অতএব, $\frac{4m^2 + 4m - 15}{2m - 3}$

$$= \frac{(2m+5)(2m-3)}{(2m-3)}$$

$$= 2m + 5$$

উদাহৰণ 3 ঃ $16x^3y\,(x^8 - y^8) \div 4xy^2(x + y)$

সমাধান ঃ $(x^8 - y^8) = (x^4)^2 - (y^4)^2$

$$
\begin{aligned}
&= (x^4 + y^4)\,(x^4 - y^4) \\
&= (x^4 + y^4)\,[(x^2)^2 - (y^2)^2] \\
&= (x^4 + y^4)\,(x^2 + y^2)\,(x^2 - y^2) \\
&= (x^4 + y^4)\,(x^2 + y^2)\,(x + y)\,(x - y)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ 16x^3y\,(x^8 - y^8) \div 4xy^2(x + y)$

$$= \frac{16x^3y(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}{4xy^2(x+y)}$$

$$= \frac{4x^2(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x-y)}{y}$$

ভুল-শুদ্ধ বিচার করি এসো (Let us find out error)

একটি শ্রেণিতে শিক্ষক একটি ভাগ অঙ্ক করতে দিলেন। তিনজন ছাত্রী অঙ্কটি ভিন্ন ভিন্ন ভাবে করল

পারিজাত ঃ $\frac{x+7}{7} = x + 1$

তমাল ঃ $\frac{x+7}{7} = x$

মালতী ঃ $\frac{x+7}{7} = \frac{x}{7} + 1$

কে ভাগটি শুদ্ধ করল? কে ভুল করল? আলোচনা করো।

দুটি অতিরিক্ত উদাহরণ দেখি এসো—

উদাহরণ 1 ঃ $3x^2 + 10x + 8$

সমাধান ঃ প্রথম কাজ a, b বার করো যাতে $a + b = 10$ এবং $ab = 24$

$3x^2 + 10x + 8$
$= 3x^2 + 6x + 4x + 8$
$= 3x(x + 2) + 4(x + 2)$
$= (x + 2)(3x + 4)$

উদাহরণ 2 ঃ $3x^2 - 10x + 8$
$= 3x^2 - 6x - 4x + 8$
$= 3x(x - 2) - 4(x - 2)$
$= (x - 2)(3x - 4)$

উদাহরণ 3 ঃ $3x^2 + 10x - 8$
$= 3x^2 + 12x - 2x - 8$
$= 3x(x + 4) - 2(x + 4)$
$= (x + 4)(3x - 2)$

উদাহরণ 4 ঃ $3x^2 - 10x - 8$
$= 3x^2 - 12x + 2x - 8$
$= 3x(x - 4) - 2(x - 4)$
$= (x - 4)(3x + 2)$

অনুশীলনী 14.2

1. নীচের ভাগগুলো করো ঃ
   (i) $x^5 \div x^2$ (ii) $6p^3 \div 3p$ (iii) $36m^3n^2 \div (-4mn^3)$
   (iv) $96p^2q^2r^4 \div 72pqr$ (v) $-12a^8b^7 \div 17a^4b^9$

2. নীচের বহুপদ রাশিগুলোকে একপদ রাশির দ্বারা ভাগ করো ঃ
   (i) $(5y^3 - 3y^2) \div y^2$
   (ii) $(5a^8 - 4a^6 + 3a^4) \div 2a^4$
   (iii) $(5p^2q^3r^4 - 10p^2q^2r^2 + 15p^3q^3r^4) \div 5p^2q^2r^2$
   (iv) $(ax^3 + bx^2 - cx) \div ax$
   (v) $(m^3n^6 - m^6n^3) \div m^3n^3$

3. নীচের ভাগগুলো করো ঃ
   (i) $(9x - 21) \div (3x - 7)$
   (ii) $10m(8m + 12) \div (4m + 6)$
   (iii) $7p^2q^2(22p - 6) \div pq(121p - 33)$
   (iv) $1729xyz(3x + 12)(4y - 24) \div 19(x + 4)(y - 6)$

4. ভাগফল নির্ণয় করো ঃ

(i) $(x^2 - 25) \div (x + 5)$
(ii) $(4a^2 + 8a + 4) \div (a + 1)^2$
(iii) $(9p^2 - 18p + 9) \div (p - 1)$
(iv) $26pqr(p + q)(q + r)(r + p) \div 52pq(q + r)(r + p)$
(v) $(x^4 - 81) \div (3 - x)$
(vi) $(x^2 + 10x + 21) \div (x + 3)$
(vii) $(m^2 + 6m - 27) \div (m - 3)$
(viii) $(4y^2 + 25y - 21) \div (y + 7)$
(ix) $(4u^2 + 25u + 21) \div (u + 1)$
(x) $52y^3(50y^2 - 98) \div 26y^2(5y + 7)$

5. নীচের গাণিতিক সংখ্যাগুলো থেকে ভুলটি বেছে বের করো এবং ভুলগুলো শুদ্ধ করো ঃ

(i) $\dfrac{9x^2}{9x^2} = 0$

(ii) $\dfrac{4x^2 + 1}{4x^2} = 1 + 1 = 2$

(iii) $\dfrac{3x + 2}{3x} = \dfrac{1}{2}$

(iv) $\dfrac{7x + 5}{5} = 7x$

(v) $\dfrac{4x^2 + 8x + 4}{4} = x^2 + 8x + 4$

আমরা কী কী শিখলাম

1. একটি বীজগণিতীয় রাশিকে তার উৎপাদকগুলোর গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়।
2. অলঘুকরণীয় উৎপাদকগুলোক আবার অন্য উৎপাদকের গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়।
3. বীজগণিতীয় রাশির উৎপাদক বিশ্লেষণে তিনটি স্তর থাকে— (i) রাশিটির পদগুলোকে প্রথমে অলঘুকরণীয় উৎপাদকের গুণফল হিসাবে লেখা হয়, (ii) সাধারণ সাধারণ উৎপাদকগুলো বেছে পৃথক করা হয়। (iii) বিতরণ বিধি প্রয়োগ করে প্রতিটি পদে বাকি থেকে যাওয়া উৎপাদকগুলো একসঙ্গে করা হয়।

4. $x^2 + px + q$ র উৎপাদক বিশ্লেষণ করতে আমাদের এমন দুটি সংখ্যা চাই যার যোগফল x -এর সহগের সমান হয়।

5. $mx^2 + px + q$ নমুনায় রাশির উৎপাদক বিশ্লেষণ করতে আমাদের এমন দুটি সংখ্যা চাই যার গুণফল mq (অর্থাৎ x^2 র সহগ এবং ধ্রুবক রাশির গুণফল)-এর সমান হয় এবং সেই সংখ্যা দুটির যোগফল x -এর সহগ p-র সমান হয়।

6. একটি বহুপদ অন্য একটি বহুপদ রাশি দ্বারা ভাগ করতে ভাজ্য ও ভাজক রাশি দুটি উৎপাদকে প্রকাশ করে নেওয়া হয়। এর পর হর এবং তার সঙ্গে আবশ্যক উৎপাদকগুলোকে ভাগ করে দেওয়া হয়।

❑ ❑ ❑

অধ্যায়-15

J8W7G3

লেখ-এর সঙ্গে পরিচয়
(Introduction to graphs)

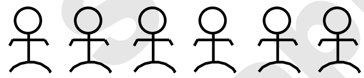
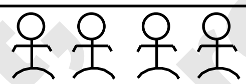
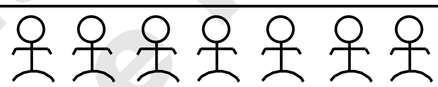
ইতিমধ্যে তোমরা বিভিন্ন প্রকার লেখ-এর সঙ্গে পরিচিত হয়েছে। দৈনন্দিন জীবনে এই লেখগুলোর ব্যবহার ও গুরুত্ব অপরিসীম। লেখ-এর মাধ্যমে সাংখ্যিক তথ্যকে চিত্রের মাধ্যমে দৃশ্য রূপে প্রকাশ করা হয়, যাতে তথ্যসমূহ কম সময়ে স্পষ্ট করে সহজে বোঝা যায়। সংবাদপত্র, দূরদর্শন, ছোট পত্রিকা, বিভিন্ন বিজ্ঞাপন ইত্যাদিতে লেখ-এর ব্যবহার আমরা দেখে এসেছি।

এই অধ্যায়ে আমরা বিভিন্ন প্রকারের অধ্যয়ন, বিন্দুর স্থানাঙ্ক তথা লেখ-এর ব্যবহারের বিষয়ে আলোচনা করব।

বিভিন্ন প্রকারের পুনরালোচনা ঃ

15.1 সচিত্র লেখ (Pictograph) :

কোনো একটি বিদ্যালয়ে তথ্য ফলকে 2019 বর্ষের ষষ্ঠ, সপ্তম এবং অষ্টম শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীর বিবরণ ছিল এ ধরণে—

বর্ষ	শ্রেণি	ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা	 = 10 জন
2019	ষষ্ঠ		
	সপ্তম		
	অষ্টম		

লেখটির অধ্যয়ন ঃ

2019 সালে বিদ্যালয়ে

(i) ষষ্ঠ শ্রেণিতে মোট 60 জন ছাত্র-ছাত্রী আছে।

(ii) সপ্তম শ্রেণিতে মোট 40 জন ছাত্র-ছাত্রী আছে।

(iii) অষ্টম শ্রেণিতে মোট 70 জন ছাত্র-ছাত্রী আছে।

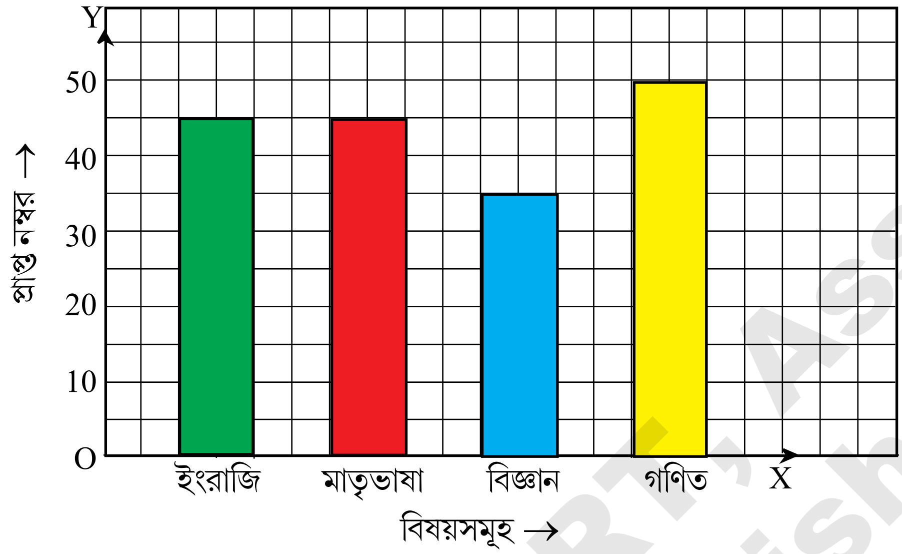
(iv) অষ্টম শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা সবচেয়ে বেশি এবং সপ্তম শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা সবচেয়ে কম।

(v) তিনটি শ্রেণির সর্বমোট ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা 170 জন।

এধরণের চিত্র বা প্রতীক ব্যবহার করে তথ্যের উপস্থাপনই **সচিত্র লেখ (Pictograph)**। তথ্য প্রকাশের এটি একটি অতি সাধারণ ও সহজ পদ্ধতি।

15.2 দণ্ড লেখ (Bar graph) :

একজন ছাত্রী তৃতীয় সাময়িক মূল্যায়নে চারটি বিষয়ে পাওয়া নম্বর দণ্ডচিত্রের সাহায্যে দেখানো হয়েছে—



লেখটির অধ্যয়ন .

☆ কতটি বিষয়ের তথ্য প্রকাশ করা হয়েছে? — 4 টি বিষয়ের।

☆ সবচেয়ে বেশি নম্বর কোন বিষয়ে পেয়েছে? — গণিতে।

☆ সবচেয়ে কম নম্বর পাওয়া বিষয়টি কী? — বিজ্ঞান।

☆ সমান নম্বর পাওয়া বিষয়গুলো কী কী? — ইংরাজি ও মাতৃভাষা।

লেখটিতে কী দেখলে?

(i) $\overrightarrow{OX}$ অনুভূমিক (Horizontal) এবং $\overrightarrow{OY}$ উলম্ব (Vertical) রেখা দুটি এঁকে দুটি রেখাতেই তথ্যগুলো দুই দিকে ক্রমে বিষয় এবং প্রাপ্ত নম্বর বসানোর জন্য নির্দিষ্ট করে নেওয়া হয়েছে।

(ii) সেভাবে $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ রেখা দুটিতে কিছু দাগ সমদূরত্বতে দেওয়া হয়েছে। তথ্যের মানগুলো বসানোর মতো দাগ দেওয়া ঘরগুলো নির্দিষ্ট করে ধরে নেওয়া হয়। একেই 'একক' (Unit) বলা হয়।

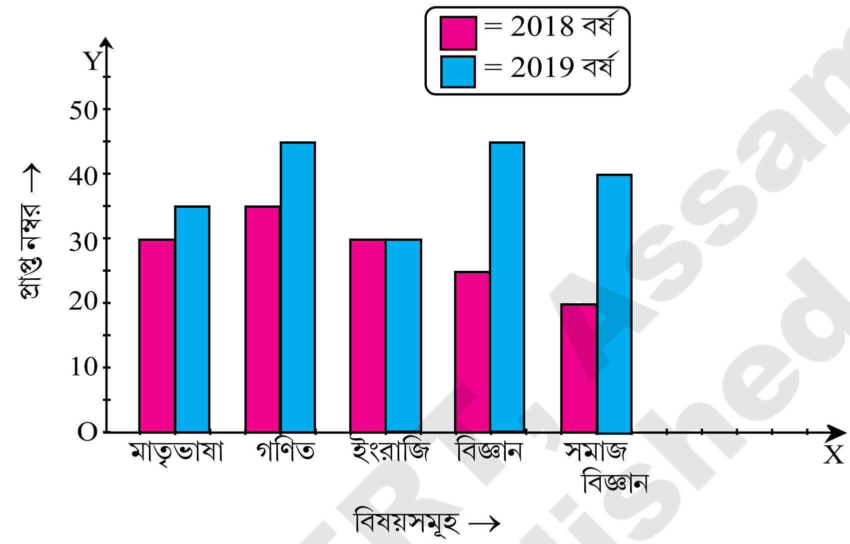
(iii) আয়তাকৃতির দণ্ডগুলোর প্রস্থগুলো সমান। এমন চিত্রতে প্রতিটি দণ্ডের প্রস্থগুলো সমান।

(iv) প্রতিজোড়া দণ্ডের মধ্যের দূরত্বও সমান।

কোনো তথ্যর সাধারণ উপস্থাপনের জন্য **দণ্ডলেখ (Bar graph)** ব্যবহার করা হয়। দণ্ডলেখ দুই বা ততোধিক সমান্তরাল উলম্ব বা অনুভূমিক আয়তাকৃতির দণ্ড দিয়ে গঠিত হয়।।

15.3 দ্বৈত দণ্ড লেখ (Double Bar graph) :

দুই বা ততোধিক তথ্যের একসঙ্গে তুলনামূলক অধ্যয়নের জন্য দ্বৈত দণ্ডলেখ ব্যবহার করা হয়। নীচের চিত্রতে কোনো একটি বিদ্যালয়ের বিভিন্ন বিষয়ে 2018 এবং 2019 বর্ষের চতুর্থ সাময়িক মূল্যায়নে একজন ছাত্র লাভ করা নম্বরের তথ্য উপস্থাপন করা হয়েছে।



লেখটির অধ্যয়ন :

(i) একটি বিদ্যালয়ের কোনো একজন ছাত্রের 2018 ও 2019 বর্ষে 5 টি বিষয়ে লাভ করা নম্বরের তুলনামূলক অধ্যয়ন করা হয়েছে।

(ii) 2018 বর্ষের তুলনায় 2019 বর্ষে ছাত্রটি 4 টি বিষয়ে অধিক নম্বর পেতে সক্ষম হয়েছে।

(iii) ইংরাজি বিষয়ে দুইটি বর্ষতেই সমান নম্বর লাভ করেছে।

(iv) 2018 বর্ষে সমাজ বিজ্ঞানে সর্বনিম্ন 20 নম্বর পেয়েছে এবং 2019 বর্ষে 40 নম্বর পেতে সক্ষম হয়েছে।

(v) 2019 বর্ষে গণিত ও বিজ্ঞান প্রত্যেকটিতে সর্বাধিক 45 নম্বর পেতে সক্ষম হয়েছে।

লেখটি পর্যবেক্ষণ করে কী দেখলাম :

(i) $\overrightarrow{OX}$ অনুভূমিক রেখার বিভিন্ন বিষয়সমূহ এবং $\overrightarrow{OY}$ উলম্ব রেখাতে বিষয়গুলোতে লাভ করা নম্বরগুলো উপস্থাপন করা হয়েছে।

(ii) দুটি বর্ষের নম্বর বোঝাতে দণ্ডগুলিতে একই রং ব্যবহার করা হয়েছে কি?

☆ না, নয়। 2018 বর্ষের জন্য ■ রং এবং 2019 বর্ষের জন্য ■ রং দণ্ডে ব্যবহার করা হয়েছে।

(iii) দণ্ডলেখ এবং দ্বৈত দণ্ডলেখ-এর মধ্যে কোনো প্রভেদ পেলে কি?

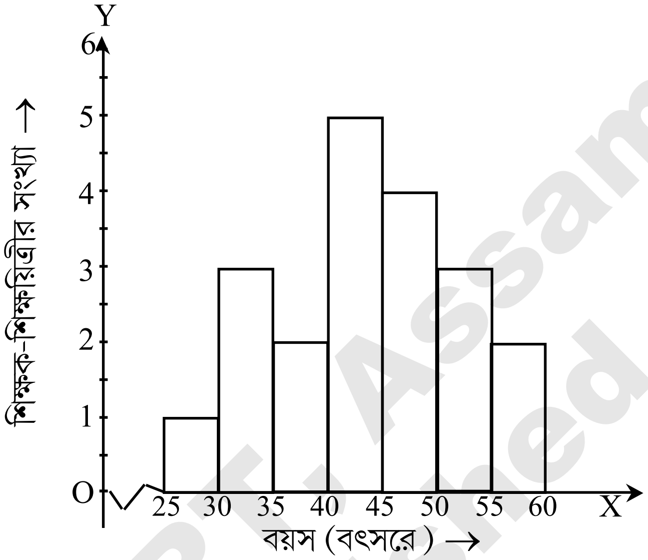
☆ হ্যাঁ, দণ্ডলেখে একটি বিষয়ের জন্য একটি দণ্ড এবং দ্বৈত দণ্ডলেখে একটি বিষয়ের জন্য দুটি দুটি দণ্ডের চিত্র আঁকা হয়েছে। অন্যদিকে ভিন্ন ভিন্ন বিষয়ের মধ্যে সমান সমান ব্যবধান রাখা হয়েছে।

এভাবে দুটি তথ্য একসঙ্গে উপস্থাপন করার জন্যই এই ধরণের লেখকে **দ্বৈত দণ্ডলেখ (Double bar graph)** বলে।

15.4 স্তম্ভলেখ (Histogram) :

নীচের চিত্রটিতে একটি বালিকা মাধ্যমিক বিদ্যালয়ের 20 জন শিক্ষক-শিক্ষয়িত্রীর বয়সের তথ্য উপস্থাপন করা হয়েছে।

বয়সের বিভাজন	সংখ্যা
25 – 30-এর কম	1
30 – 35-এর কম	3
35 – 40-এর কম	2
40 – 45-এর কম	5
45 – 50-এর কম	4
50 – 55-এর কম	3
55 – 60-এর কম	2
মোট ঃ	20



[ভগ্নরেখাটি 0 ও 25 বৎসর বয়সের কোনো শিক্ষক-শিক্ষয়িত্রী নেই বোঝাচ্ছে।]

লেখটির অধ্যয়ন ঃ

(i) $\overrightarrow{OX}$ চিহ্ন অবিরত ভাবে বয়সের বিভাজনসমূহ এবং $\overrightarrow{OY}$ চিহ্নে নির্দিষ্ট বয়সে শিক্ষক-শিক্ষয়িত্রীর সংখ্যা দেখানো হয়েছে।

(ii) বিদ্যালয়ের 20 জন শিক্ষক-শিক্ষয়িত্রীর বয়সের তথ্য উপস্থাপন করা হয়েছে।

(iii) বিদ্যালয়টিতে 25 – 30 বৎসর বয়সের ভিতর সব থেকে কম শিক্ষক-শিক্ষয়িত্রী (1 জন) আছে এবং 40 – 45 বৎসর বয়সের ভিতর সকলের থেকে বেশি (5 জন) শিক্ষক-শিক্ষয়িত্রী আছে।

(iv) 30 – 35 বছর এবং 50 – 55 বছরের ভিতর সবচেয়ে সংখ্যক (3 জন) শিক্ষক-শিক্ষয়িত্রী আছে।

(v) 55 – 60 বৎসর বয়সের ভিতরে কেবল দুজন শিক্ষক-শিক্ষয়িত্রী আছে।

লেখটি পর্যবেক্ষণ করে কী পেলাম—

(i) বয়সের বিভাজনগুলোর মধ্যে বিরতি রাখা হয়েছিল কি?

☆ না, 5 বছরের বয়সের বিভাজনগুলো অবিরতভাবে উপস্থাপন করা হয়েছে।

(ii) দণ্ডগুলোর মধ্যে প্রভেদ রাখা হয়েছে কি?

☆ না, দণ্ডগুলোর মধ্যে কোনো ধরণের প্রভেদ রাখা হয়নি এবং দণ্ডগুলোর প্রস্থ অন্য দণ্ড-লেখের মতো সমান।

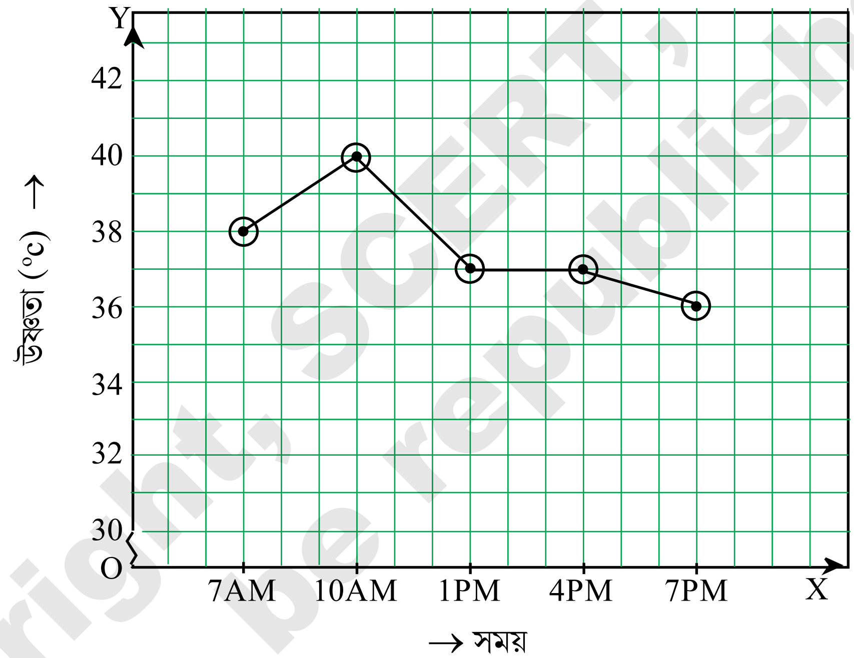
অর্থাৎ অবিরত শ্রেণি অন্তরালযুক্ত কোনো তথ্যের মানসমূহের ব্যবধান-বিহীন দণ্ডের উপস্থাপনই হচ্ছে **স্তম্ভলেখ বা হিস্টোগ্রাম**। এধরণের লেখ দূর থেকে দেখতে স্তম্ভের মতো হওয়ার জন্য একে স্তম্ভ লেখ বলা হয়।

15.5 রেখা লেখ (Line Graph) :

নির্দিষ্ট সময়ের ব্যবধানে হওয়া তথ্যের পরিবর্তন সহজে বুঝতে রেখা লেখ-এর ব্যবহার করা হয়। লেখ কাগজে একটি অক্ষর সময় এবং অন্য অক্ষর অনুরূপ তথ্য চিহ্নিত করা বিন্দুগুলো একাদিক্রমে রেখায় সংলগ্ন করে রেখা-লেখ পাওয়া যায়। পরবর্তী উদাহরণগুলোর দ্বারা কথাগুলো বুঝতে চেষ্টা করি এসো।

উদাহরণ 1 ঃ নীচের চিত্রটি দেখো। একটি মেয়ের জ্বর হওয়ায় প্রতি তিন ঘণ্টার পর পর শরীরের যে উষ্ণতা পাওয়া গেছে, তা এরকম—

সময়	7 AM	10 AM	1 PM	4 PM	7 PM
উষ্ণতা (^oC)	38	40	37	37	36



লেখ-টির অধ্যয়ন ঃ

(i) লেখটি একজন রুগ্ন মেয়ের এক দিনের 12 ঘণ্টার দেহের উষ্ণতার তথ্য প্রকাশ করেছে।

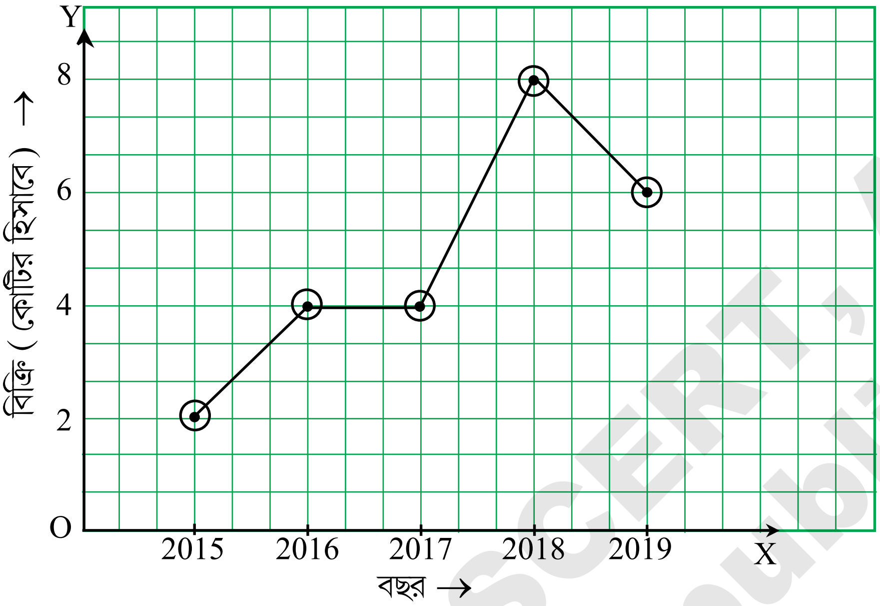
(ii) লেখটিতে সকাল 7 -টার সময় থেকে সন্ধ্যে 7 টা পর্যন্ত উষ্ণতার তথ্য সন্নিবিষ্ট করা হয়েছে।

(iii) বেলা 10 টার উষ্ণতা সর্বাধিক 40^oC হয়েছে এবং সন্ধ্যে 7 -টার সময় উষ্ণতা কমে 36^oC হয়েছে।

(iv) বেলা 10 টা থেকে উষ্ণতা কমতে আরম্ভ করেছে এবং দুপুর 1 টার থেকে বিকেল 4 টার ভিতর পরিবর্তন হয়নি।

রেখা লেখ আঁকতে লেখ কাগজে অনুভূমিক ও উলম্ব অক্ষ দুটি নেওয়া হয়। সাধারণত অনুভূমিক অক্ষকে $\overrightarrow{OX}$ এবং উলম্ব অক্ষকে $\overrightarrow{OY}$ দ্বারা বোঝান হয়। তথ্যের উপস্থাপনের সময় প্রয়োজন এবং সুবিধা অনুসারে দুটি অক্ষতে উপযুক্ত একক ধরে নেওয়া হয়। সময় সম্বন্ধীয় তথ্যের উপস্থাপনের ক্ষেত্রে সাধারণত অনুভূমিক অক্ষতে সময়গুলো বসান হয়। শেষে উপস্থাপন করা বিন্দুগুলোকে সরল রেখা দ্বারা একাদিক্রমে সংযোগ করা হয়।

উদাহরণ 2 ঃ নীচের চিত্রটিতে একটি কোম্পানির গত পাঁচ বছরের বিক্রির তথ্য দেখান হয়েছে।



স্কেল ঃ
OY অক্ষতে ঃ প্রতি 3 টি ছোট বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 কোটি টাকা
OX অক্ষতে ঃ প্রতি 3 টি ছোট বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 বছর

লেখটির অধ্যয়ন ঃ

(i) লেখটির অনুভূমিক অক্ষ বা X অক্ষটি বছরগুলোর নির্দেশনা দিয়েছে এবং উলম্ব অক্ষ বা Y অক্ষ কোটির হিসাবে বিক্রির তথ্য দেখাচ্ছে।

(ii) কোম্পানিটির 2015 বর্ষে বিক্রির পরিমাণ সব থেকে কম এবং 2018 বর্ষে বিক্রির পরিমাণ বেশি।

(iii) 2016 ও 2017 বর্ষের বিক্রির পরিমাণ সমান।

(iv) 2019 বর্ষের বিক্রির পরিমাণ 2018 বর্ষের তুলনায় হ্রাস হয়েছে।

(v) কোম্পানিটির বিক্রির সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন পরিমাণের পার্থক্য (8 – 2) = 6 কোটি টাকা।

উদাহরণ 3 ঃ পরের পৃষ্ঠার লেখ-চিত্রটিতে 2019 -এ অনুষ্ঠিত দশটি ভিন্ন ভিন্ন ক্রিকেট খেলায় P এবং Q দুজন ব্যাটস্‌ম্যান সংগ্রহ করা মোট রানের সংখ্যা উপস্থাপন করা হয়েছে। অতএব লেখ দুটি অধ্যয়ন করে নীচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

(i) লেখ-দুটি কীসের তথ্য উপস্থাপন করেছে?

(ii) অক্ষ দুটি কী কী তথ্যের নির্দেশনা দিয়েছে?

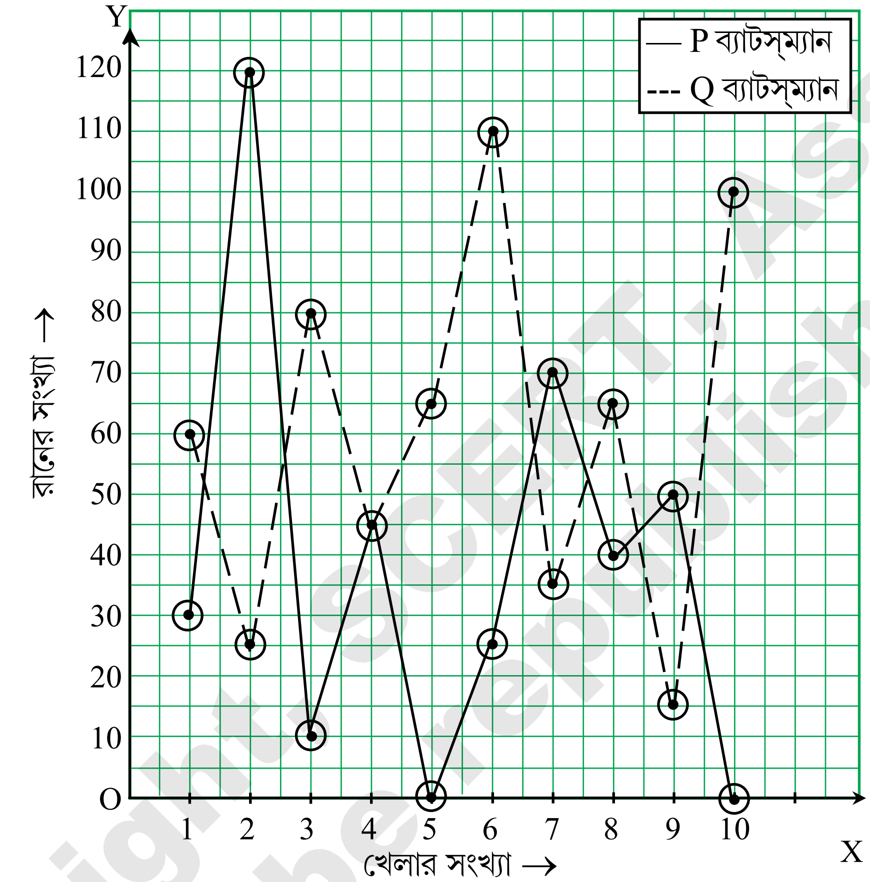
(iii) - - -চিহ্নিত লেখ-টি কোন্ ব্যাটস্‌ম্যানের তথ্যের নির্দেশ করেছে?

(iv) কোন খেলায় দুজন ব্যাটস্‌ম্যান সমান সংখ্যক রান সংগ্রহ করেছিলেন?

(v) কোনো খেলায় এক রানও না করা (0 রান) ব্যাটস্‌ম্যান আছে কি? যদি থাকে, তিনি কোন্ ব্যাটস্‌ম্যান এবং কতটি খেলায় তার এমন হয়েছিল?

(vi) খেলাগুলোয় কোন ব্যাটস্‌ম্যানের সামগ্রিক প্রদর্শন ভাল ছিল?

(vii) P ব্যাটস্‌ম্যানের সর্বাধিক এবং সর্বনিম্ন রান কত?



সমাধান ঃ

(i) লেখটিতে 2019 বর্ষে অনুষ্ঠিত 10 টি ভিন্ন ভিন্ন ক্রিকেট খেলায় দুজন ব্যাটস্‌ম্যান ক্রমে P ও Q সংগ্রহ করা রানের তথ্য উপস্থাপন করা হয়েছে?

(ii) অক্ষ দুটি ক্রমে X অক্ষটি (অনুভূমিক অক্ষ) খেলার সংখ্যা এবং Y অক্ষটি (উলম্ব অক্ষ) প্রতিটি খেলার দুজন ব্যাটস্‌ম্যান সংগ্রহ করা রানের সংখ্যা নির্দেশ করেছে।

(iii) - - - - দেওয়া লেখ-টি Q ব্যাটস্‌ম্যানের রানের তথ্য নির্দেশ করেছে।

(iv) 4 নং খেলাটিতে দুজন ব্যাটস্‌ম্যান সমান রান সংগ্রহ করেছিল।

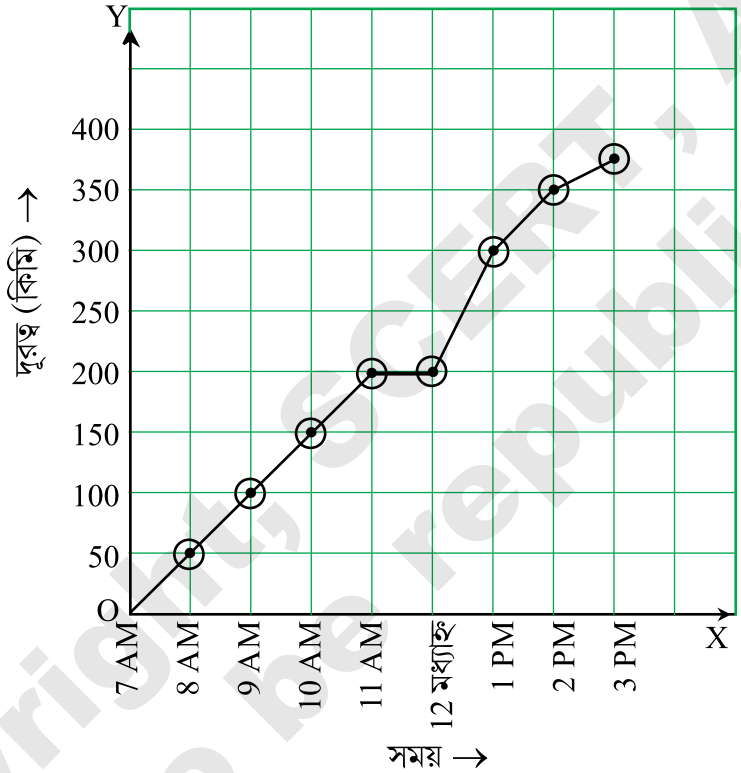
(v) হ্যাঁ, খেলাগুলোতে P ব্যাটস্‌ম্যান ক্রমিক 5 নং এবং 10 নং খেলায় এক রানও করতে সক্ষম হননি।

(vi) খেলাগুলোতে Q ব্যাটস্‌ম্যানের সামগ্রিক প্রদর্শন উন্নত ছিল।

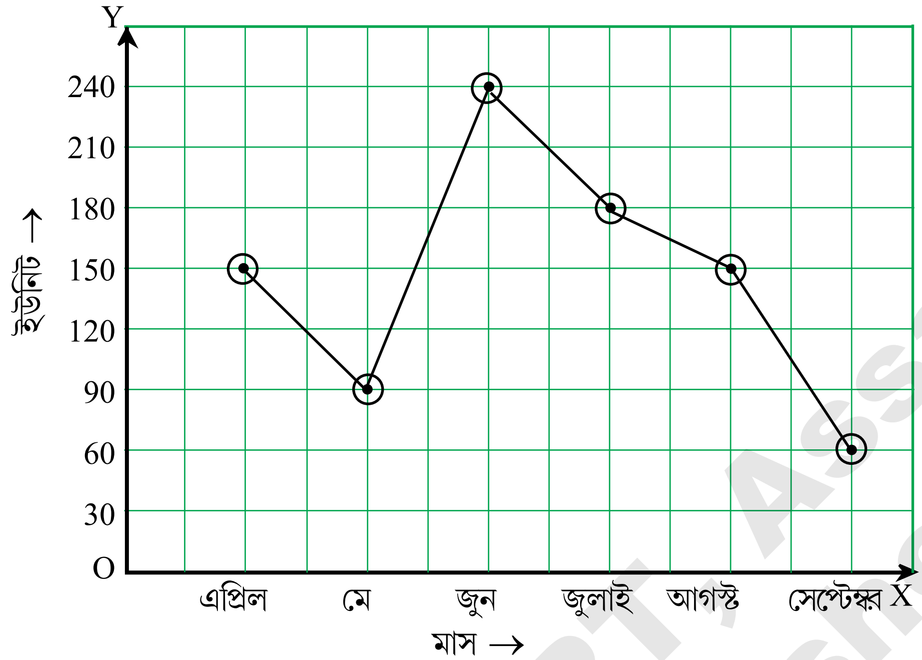
(vii) P ব্যাটস্‌ম্যানের সর্বাধিক রান ছিল ক্রমে 120 রান এবং 0 রান।

অনুশীলনী 15.1

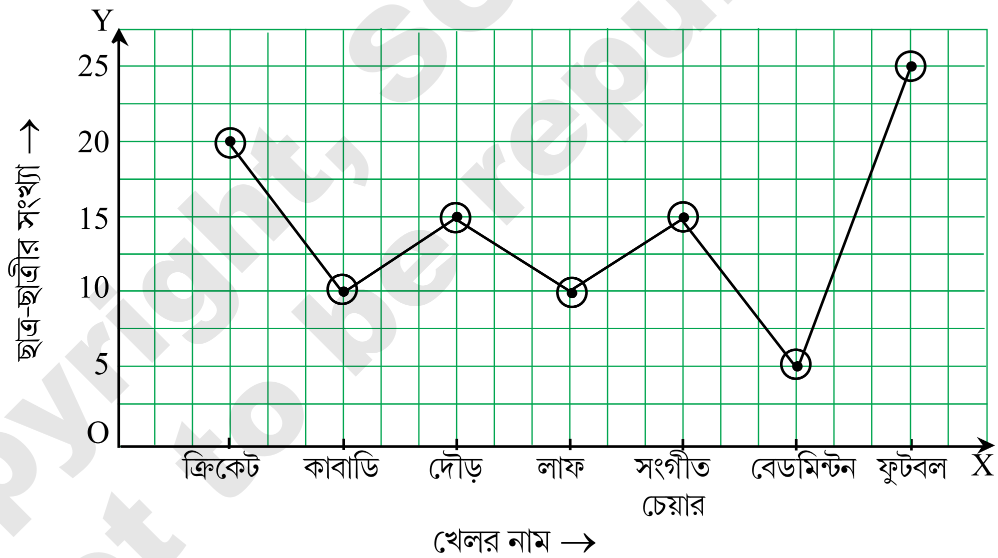
1. একটি গাড়ি লখিমপুর থেকে গুয়াহাটি গিয়েছিল। নীচের চিত্রে দূরত্ব ও সময়ের একটি রৈখিক লেখ দেখান হয়েছে। লেখটি অধ্যয়ন করো এবং নীচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।
   (i) অক্ষ দুটি কী কী তথ্য নির্দেশ করেছে?
   (ii) গাড়িটি মোট কত সময়ে কত দূরত্ব ভ্রমণ করল?
   (iii) কোন সময়ে গাড়িটির গতি বেশি ছিল?
   (iv) গাড়িটি রাস্তায় থেমেছিল কি? যদি থেমেছিল, কত সময়ের জন্য থেমেছিল?
   (v) কোন সময়ে গাড়িটির গতিবেগ সমান ছিল?



2. একজন গৃহস্থের গত ছমাসের বিদ্যুতের বিলের রেখা-লেখ পরের পৃষ্ঠায় দেওয়া হয়েছে। লেখাটি অধ্যয়ন করো এবং নীচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।
   (i) লেখটি কী তথ্যের উপস্থাপন দেখিয়েছে?
   (ii) Y অক্ষ থেকে কী তথ্য পাচ্ছি?
   (iii) কোন মাসে বেশি ইউনিট বিদ্যুৎ খরচ হয়েছে?
   (iv) সব থেকে কম ইউনিট বিদ্যুৎ খরচ কোন্ মাসে হয়েছিল?
   (v) সমান সমান ইউনিট বিদ্যুৎ খরচ হওয়া মাসগুলো কী কী?



3. কোনো একটি বিদ্যালয়ের বিভিন্ন খেলাপ্রেমী 100জন ছাত্র-ছাত্রীর একটি রেখালেখ দেওয়া হলো। লেখটি অধ্যয়ন করে নীচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।



(i) লেখটিতে কতটি খেলার তথ্য দেওয়া আছে?

(ii) সবচেয়ে বেশি সংখ্যক ছাত্র-ছাত্রীর ভালো লাগা খেলা কোনটি?

(iii) একেবারে কম সংখ্যকের ভালো লাগা খেলা কোনটি?

(iv) সমান সংখ্যক ছাত্র-ছাত্রীর পছন্দের খেলা কয়টি এবং কী কী?

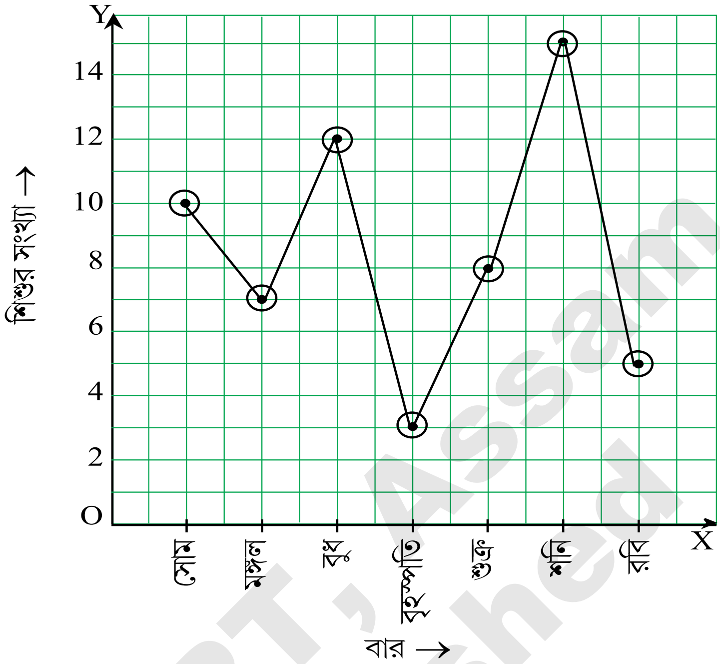
4. একটি চিকিৎসালয়ে একটি সপ্তাহে জন্মানো শিশুর সংখ্যা পাশের রেখা-লেখটিতে দেখান হয়েছে? লেখটি অধ্যয়ন করে নীচের প্রশ্নসমূহের উত্তর দাও।

(i) লেখটিতে X অক্ষ কী নির্দেশ করছে?

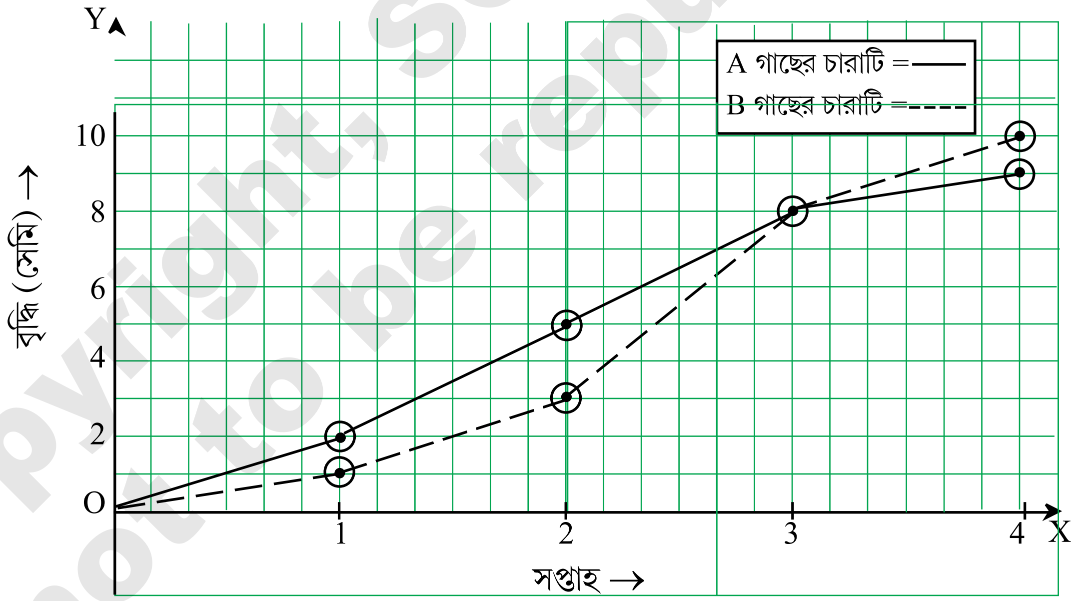
(ii) সপ্তাহটিতে সবচেয়ে বেশি শিশু জন্মানো দিন কোনটি?

(iii) কী বারে সবচেয়ে কম সংখ্যক শিশুর জন্ম হয়েছিল?

(iv) সপ্তাহটিতে মোট কতটি শিশুর জন্ম হয়েছিল?



দলীয় কার্য ঃ একটি প্রকল্প করার জন্য মেধাশ্রী ও মেঘাশ্রী দুটি ভিন্ন ভিন্ন প্রজাতির গাছের চারা A ও B একই ধরণের অবস্থায় পরীক্ষাগারে বড় হতে দিয়েছিল। প্রতি সপ্তাহে চারাগুলোর বৃদ্ধির মাপ নেওয়া হয়েছিল? একমাসের মাথায় তাদের সংগৃহীত তথ্যের বিবরণ এধরণের—



(i) A গাছের চারাটি (a) প্রথম সপ্তাহে, (b) দ্বিতীয় সপ্তাহে, (c) তৃতীয় সপ্তাহে কতটুকু বৃদ্ধি পেয়েছিল?

(ii) B গাছের চারাটি (a) প্রথম সপ্তাহে, (b) দ্বিতীয় সপ্তাহে, (c) চতুর্থ সপ্তাহে কতটুকু বৃদ্ধি পেয়েছিল?

(iii) দ্বিতীয় ও চতুর্থ সপ্তাহের দিকে লক্ষ্য করো। গাছের চারা দুটির বৃদ্ধির ধরণ একই ছিল কি? যদি উত্তর 'না' হয়, কী পরিবর্তন হয়েছিল?

(iv) কোন সপ্তাহে দুটি চারার বৃদ্ধি সমান ছিল?

(v) এক মাসের অন্তে কোন চারার বৃদ্ধির পরিমাণ বেশি হয়েছিল?

15.6 রৈখিক লেখ (Linear Graph) :

যেকোনো একটি রেখা-লেখে কিছু রেখাদণ্ড সংযোগ হয়ে থাকে। কখনোবা লেখটি সম্পূর্ণ অবিচ্ছিন্ন রেখাও হতে পারে। এমন অবিচ্ছিন্ন রেখা-লেখকে রৈখিক লেখ বলে। একটি রৈখিক লেখ আঁকতে একটি লেখ- কাগজে বিন্দুসমূহের অবস্থান নির্ণয় করে নেওয়া হয়। এখন লেখ কাগজে একটি বিন্দুর অবস্থান কীভাবে অতি সহজে নির্ণয় করা যায়, নীচে সে বিষয়ে আলোচনা করি এসো—

15.6.1 বিন্দুর অবস্থান (Location of a point):

নীচের কথোপকথনগুলো খেয়াল করো—

শিক্ষক ঃ উর্মি, তোমাদের বাড়ি কোথায়?

উর্মি ঃ মাধবপুর স্যার।

শিক্ষক ঃ মাধবপুরের কোন স্থানে?

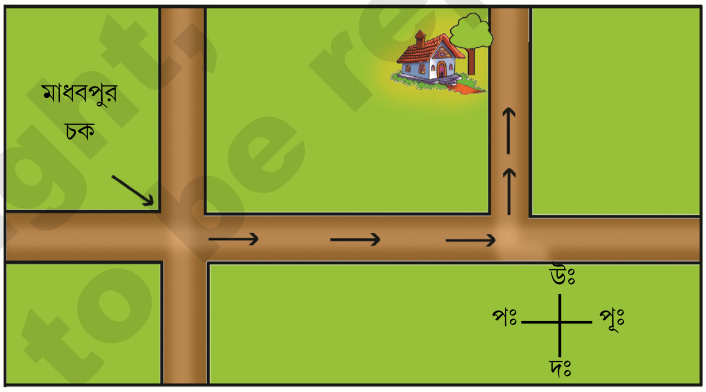
উর্মি ঃ মাধবপুরের চারআলি (চক) থেকে পূব দিকে যেতে হয় স্যার।

শিক্ষক ঃ কতদূর যেতে হয়?

উর্মি ঃ সেদিকে 200 মিটার গিয়ে আবার উত্তর দিকে 150 মিটার গেলেই আমাদের বাড়িটি পাবেন।

শিক্ষক ঃ তোমাদের বাড়িটি রাস্তার বাঁদিকে না ডানদিকে?

উর্মি ঃ রাস্তার বাঁদিকে বকুল গাছের কাছেই আমাদের বাড়ি?

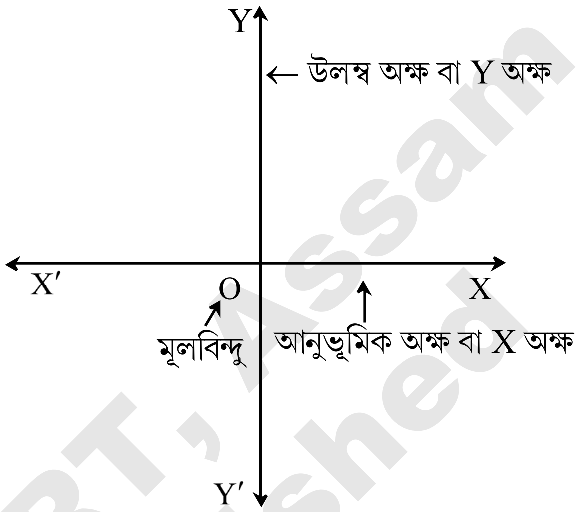


অর্থাৎ উর্মিদের বাড়িটি বের করতে হলে, মাধবপুর চারআলি থেকে পূর্ব দিকে 200 মিটার যাওয়ার পর উত্তর দিকে 150 মিটার গিয়ে বাঁদিকে একটি বকুল গাছের পাশেই।

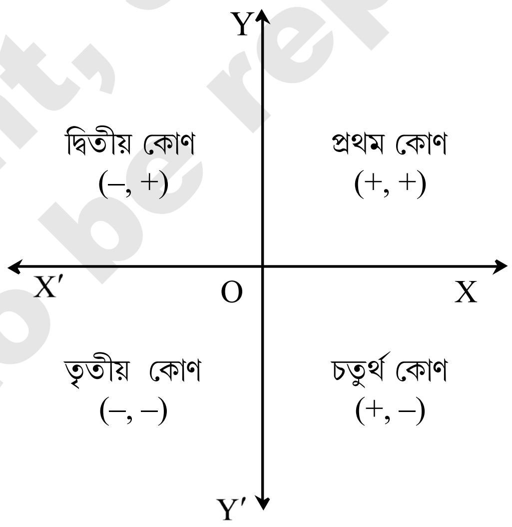
অর্থাৎ কোনো একটি নির্দিষ্ট স্থানের অবস্থিতির বর্ণনা দিতে প্রথমে আমাদের সকলের জানা বা চেনা একটি জায়গা লাগবে। সেই স্থান থেকে নির্দিষ্ট স্থানে কোন দিকে কতদূর যেতে হবে তথা যাওয়ার বাঁদিকে না ডানদিকে ইত্যাদির সঠিক বর্ণনা জানা চাই। বর্ণনা শুদ্ধ এবং সঠিক না হলে নির্দিষ্ট স্থানে উপস্থিত হওয়ায় অসুবিধা হবে।

ঠিক তেমনিভাবে সহজেই কোনো একটি বিন্দুর সঠিক অবস্থান নির্ণয় করার জন্য দুটি নির্দেশক রেখার প্রয়োজন হয়। লেখ-কাগজে দুটি রেখা পরস্পর লম্বভাবে নেওয়া হয় অর্থাৎ তার একটি অনুভূমিকভাবে এবং অন্যটি উলম্বভাবে থাকবে। এই রেখা দুটিকে 'অক্ষ' (axes) বলা হয়।

অনুভূমিক অক্ষটিকে X′OX অক্ষ বা সংক্ষেপে X অক্ষ বলে। এই দুটি অক্ষ প্রকৃতভাবে YOY′ অক্ষকে বা সংক্ষেপে Y অক্ষ বলা হয়। এই দুটি অক্ষ প্রকৃতপক্ষে দুটি সংখ্যারেখা। দুটি অক্ষই O বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে কাটাকাটি করে। এই O বিন্দুটিকে 'মূল বিন্দু' (origin) বলা হয়। মূলবিন্দুর অবস্থান (0,0) হয়। X অক্ষ এবং Y অক্ষ থাকা সমতলটিকে 'কার্টেজীয় সমতল' বলে। একটি সমতলভূমিতে থাকা কোনো একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা পদ্ধতিটি একদম প্রথমে 17 শ শতকে ফরাসি দার্শনিক তথা গণিতজ্ঞ রেনে ডেকর্টিজ ব্যবহার করেছিলেন এবং পরে তাঁর সম্মানার্থে উক্ত পদ্ধতিটিকে কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতি (Cartesian Coordinate System) নাম দেওয়া হয়।



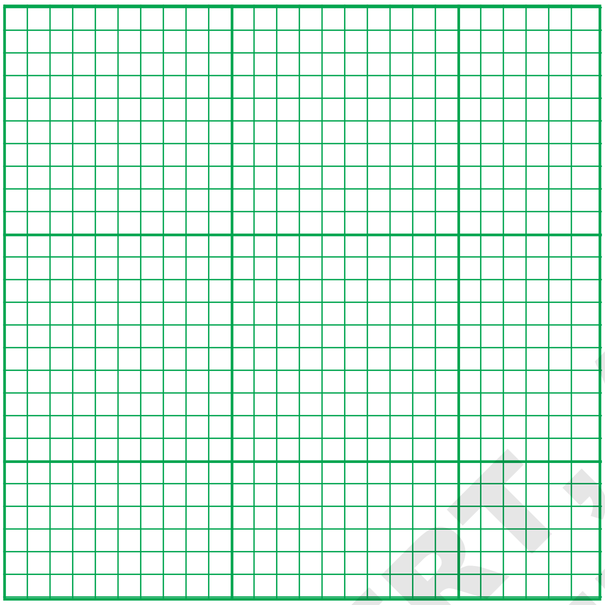
কার্টেজীয় পদ্ধতিতে X এবং Y অক্ষ সমতলটিকে চারটি ভাগে বিভক্ত করে। প্রতিটি ভাগকে **কোণে** (quad-rant) বলা হয়। নীচের চিত্রটিতে উক্ত চারটি কোণ দেখান হয়েছে। এই অধ্যায়ে আমরা কেবল কোণের (+, +) বিন্দুর অবস্থান বিষয়ে আলোচনা করব।



লেখ কাগজ বা ছক কাগজ (Graph paper) কী?

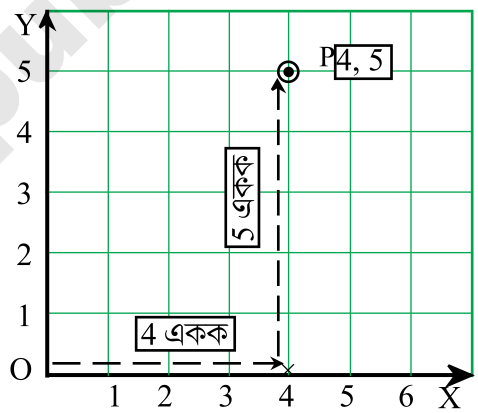
লেখ কাগজ বা ছক কাগজ হচ্ছে কিছু বর্গের জাল সদৃশ একটি কার্টেজীয় সমতল। এখানে প্রয়োজন এবং সুবিধা অনুসরণে X অক্ষ এবং Y অক্ষ অঙ্কন করা হয়। মূল বিন্দু O র সাপেক্ষে নির্ধারিত বা প্রয়োজনীয় বিন্দুগুলো

সমান হয়। সেভাবে তথ্যের মানের ওপর ভিত্তি করে লেখ-কাগজের আকারের অনুসরণে এককগুলো নির্ধারণ করে নেওয়া হয় বা নেওয়া যায়।



15.6.2 কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক (Cartesian Coodinate)ঃ

ধরা যাক, কার্টেজীয় সমতল একটিতে P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এই P বিন্দুটি Y অক্ষ থেকে 4 একক দূরত্বে এবং X অক্ষর থেকে 5 একক দূরত্বে অবস্থিত। অন্যভাবে আমরা বলতে পারি যে, P বিন্দুটি মূল বিন্দুর থেকে OX দিকে 4 একক দূরত্বে এবং এই স্থান থেকে OY দিকে 5 একক দূরত্বে আছে। অতএব P বিন্দুটির স্থানাঙ্ক হবে (4, 5)। এর 4 কে P বিন্দুর 'ভুজ' (Abscissa) বা 'x- স্থানাঙ্ক' এবং 5কে P বিন্দুর 'কোটি' (Ordinate) বা 'y- স্থানাঙ্ক' বলা হয়।



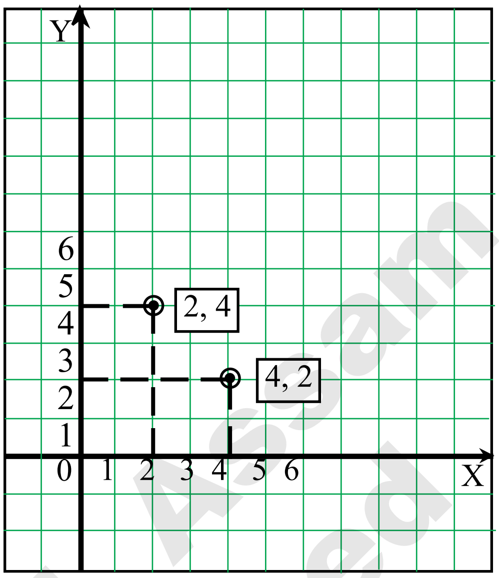
মনে রাখবে ঃ কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কর প্রথম সংখ্যাই X- অক্ষরের দিকের মান এবং দ্বিতীয় সংখ্যা Y অক্ষরের দিকের মান নির্দেশ করে।

ওপরের চিত্রটি লক্ষ করো। কার্টেজীয় সমতলটিতে (4, 5) বিন্দুটি বসান হয়েছে। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (4, 5)। অর্থাৎ বিন্দুটির মূল বিন্দুর থেকে X অক্ষে 4 একক ঘর যাওয়ার পর তার সোজাসুজি ওপরে Y অক্ষে 5 এককের ঘরে আছে। এই ক্ষেত্রে লেখ-কাগজে সুবিধা অনুসারে আমরা একক নিতে পারি। এখানে লেখ-কাগজের একটি বর্গের বাহুকে এক একক ধরা হয়েছে।

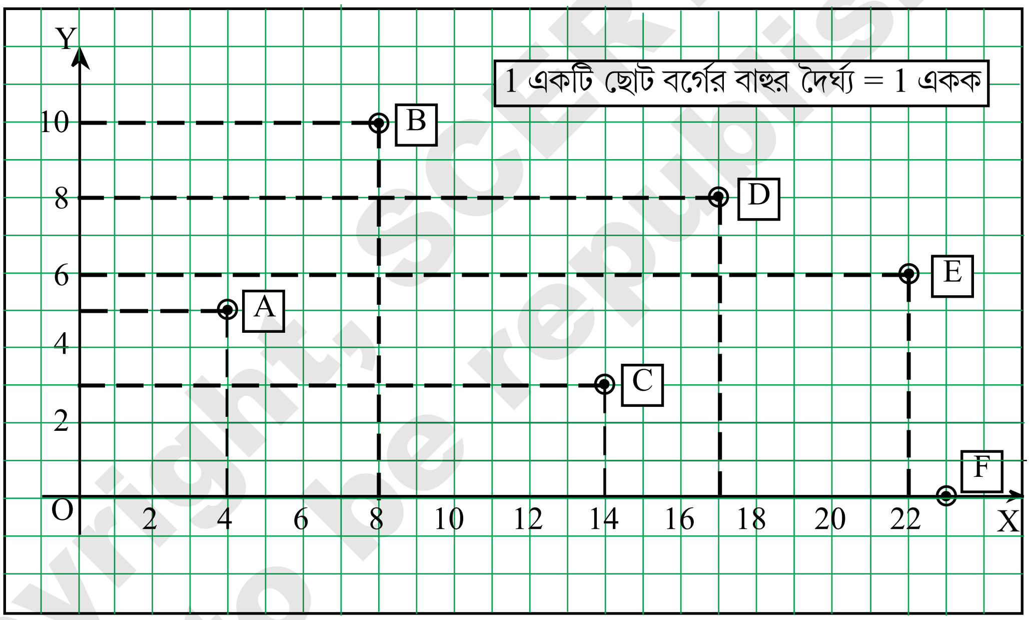
উদাহরণ 4 ঃ লেখ কাগজে (4, 2) বিন্দুটি বসাও। এই বিন্দুটি (2, 4) বিন্দুর মতো একই কী?

সমাধান ঃ লেখ কাগজে X অক্ষ এবং Y অক্ষ দুটি আঁকা হলো। এবার একটি ছোট বর্গ = 1 একক ধরে O (0, 0) বিন্দুর থেকে ডান দিকে X অক্ষে 4 ঘর যাওয়ার পর X অক্ষের ওপরের দিকে Yর দিকে 2 ঘর যাওয়ার ফলে প্রশ্নের (4, 2) বিন্দুটি পাওয়া গেল।

তারপর একই লেখ-কাগজে একই অক্ষে একই একক ব্যবহার করে (2, 4) বিন্দুটি বসিয়ে দেখা গেল যে (4, 2) এবং (2, 4) বিন্দু দুটা সম্পূর্ণ আলাদা বিন্দু।



উদাহরণ 5 ঃ লেখ-এর সাহায্যে তালিকাটি পূর্ণ করি এসো—



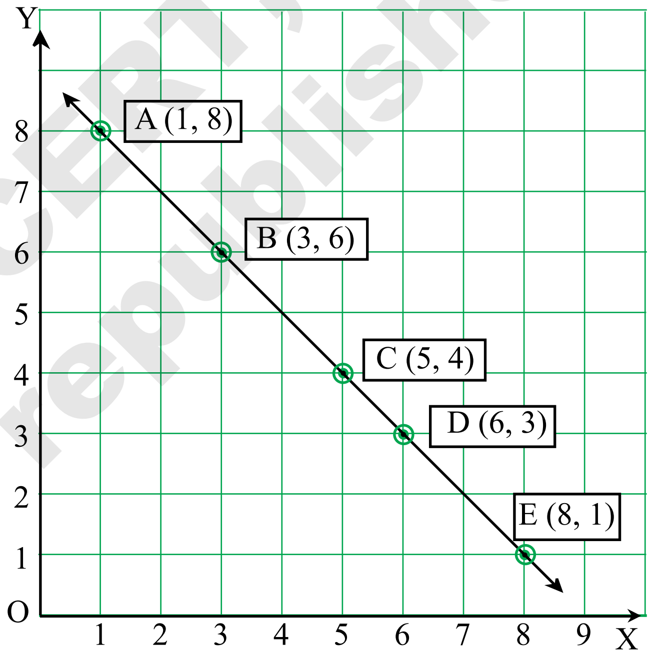
বিন্দু	ভুজ	কোটি	X অক্ষ থেকে দূরত্ব	Y অক্ষ থেকে দূরত্ব	স্থানাঙ্ক
A	4	5	5	4	(4, 5)
B					
C					
D					
E					
F					

সমাধান ঃ নীচের থেকে A বিন্দুর ভুজ 4 এবং কোটি 5 এবং স্থানাঙ্ক (4, 5)। একইভাবে বাকি B, C, D ও E বিন্দুর ক্ষেত্রে তালিকাটি পূর্ণ করা হয়েছে। কিন্তু F বিন্দুর ক্ষেত্রে কিছু আলাদা হবে। F বিন্দুটি Y অক্ষ থেকে 23 একক দূরত্বে আছে, কিন্তু বিন্দুটি X অক্ষের সঙ্গে লেগে আছে। অর্থাৎ F বিন্দুটির কোটি 0। F বিন্দুর ভুজ হবে 23 এবং বিন্দুটির স্থানাঙ্ক হবে (23, 0)।

বিন্দু	ভুজ	কোটি	স্থানাঙ্ক
A	4	5	(4, 5)
B	8	10	(8, 10)
C	14	3	(14, 3)
D	17	8	(17, 8)
E	22	6	(22, 6)
F	23	0	(23,0)

উদাহরণ 6 ঃ লেখ কাগজে নীচের বিন্দুগুলো বসাও এবং এই বিন্দুগুলো একই রেখায় আছে কি না পরীক্ষা করো— A (1, 8), B (3, 6), C (5, 4), D (6, 3), E (8, 1)

সমাধান ঃ লেখ কাগজে X অক্ষ এবংY অক্ষ একে নেওয়া হল। অক্ষ দুটি O বিন্দুতে কাটাকাটি করছে। O বিন্দুর স্থানাঙ্ক হচ্ছে (0,0)। এবার A, B, C, D এবং E বিন্দুগুলি বসিয়ে সংযোগ করার ফলে AE রেখাখণ্ড পাওয়া গেল। দেখা গেলযে বিন্দুগুলি একই রেখাতে রয়েছে।



অনুশীলনী 15.2

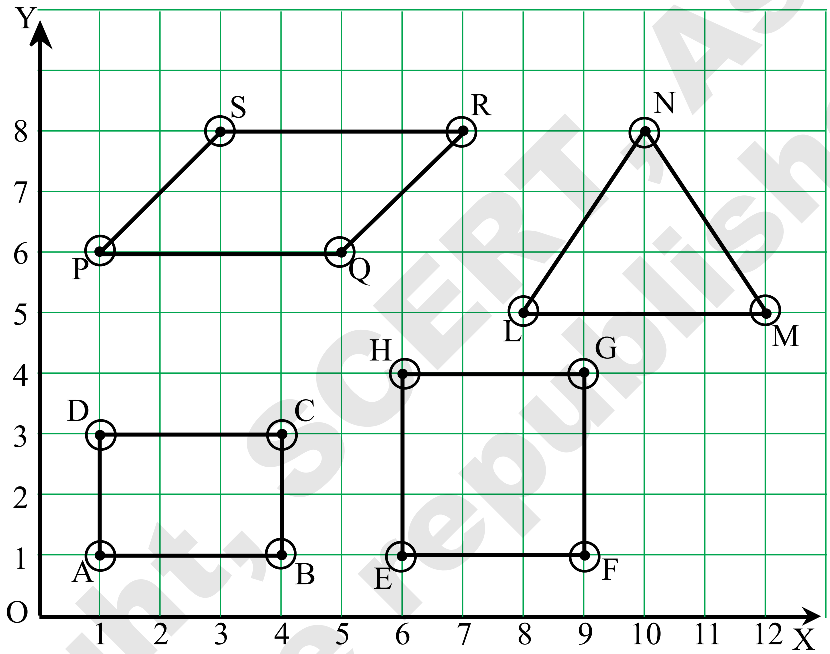
1. নীচের বিন্দুগুলোর ভুজ ও কোটি নির্ণয় করো
   (i) (0, 4) (ii) (5, 9) (iii) (7, 7) (iv) (5, 0)
2. নীচের বিন্দুগুলোর কোন অক্ষে থাকবে লেখো।
   (i) (3, 0) (ii) (0, 8) (iii) (9, 0) (iv) (0, 10)

3. নীচের বিন্দুগুলো লেখ-কাগজে বসাও এবং বিন্দুগুলো একই রেখায় আছে কি না পরীক্ষা করে দেখো ঃ

(i)	A (2, 2)	B (3,3)	C (5, 5)	D (6, 6)
(ii)	K (4, 0)	L (4, 2)	M (4, 5)	N (4, 6)
(iii)	P (1, 2)	Q (4,4)	R (6, 7)	
(iv)	S (2, 1)	T (2, 5)	O (5, 5)	P (7, 7)

4. লেখ কাগজে (2, 6) এবং (5, 3) বিন্দু দুটি বসাও। এই বিন্দু দুটির মধ্যদিয়ে যাওয়া রেখাটি X অক্ষ এবং Y অক্ষে ছেদ করা বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

5. নীচের লেখ-কাগজে অঙ্কিত জ্যামিতিক আকৃতিগুলোর শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক লেখো — যেমন S(3, 8) ইত্যাদি।



6. শুদ্ধ অশুদ্ধ বিচার করো এবং অশুদ্ধগুলো শুদ্ধ রূপে লেখো ঃ
   (i) একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, 0) হলে বিন্দুটি Y অক্ষে থাকবে।
   (ii) একটি বিন্দুর X-স্থানাঙ্ক 0, কিন্তু Yর স্থানাঙ্ক 0 নয়, তবে বিন্দুটি Y অক্ষে থাকবে।
   (iii) মূল বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)।

15.7 দৈনন্দিন জীবনে লেখ-এর ব্যবহার (Use of graph in daily life) ঃ

উদাহরণ 7 ঃ পরিমাণ এবং খরচ (Quantity & Cost) : নীচের তালিকাটিতে পেট্রোলের পরিমাণ এবং পেট্রোলের দাম দেওয়া হয়েছে। তথ্যগুলো দিয়ে একটি রৈখিক লেখ আঁকো।

পেট্রেলের পরিমাণ (লিটার)	5	10	15	20
পেট্রোলের দাম (টাকায়)	350	700	1050	1400

সমাধান ঃ

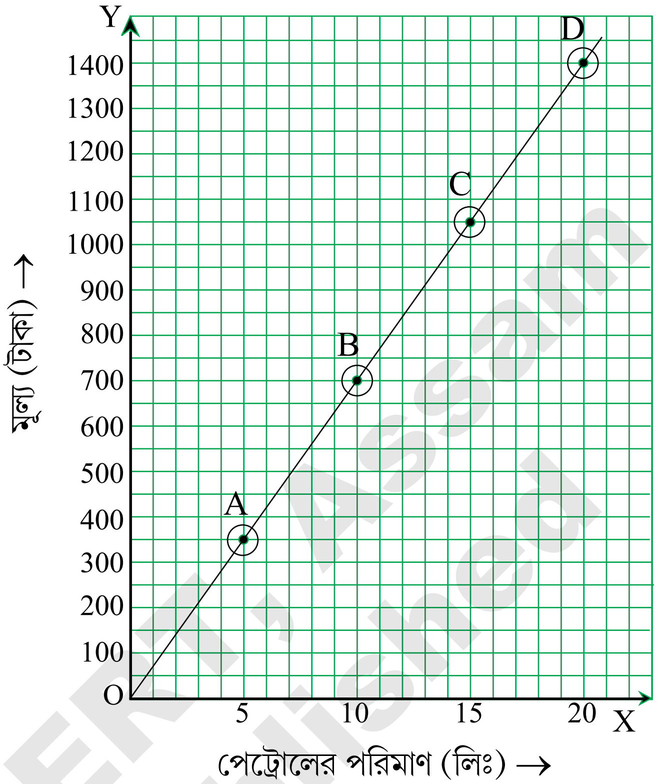
(i) লেখ-কাগজে X অক্ষ এবং Y অক্ষ দুটি অঙ্কন করো হল।

(ii) X অক্ষে পেট্রোলের পরিমাণ এবং Y অক্ষতে পেট্রোলের দাম চিহ্নিত করা হল।

(iii) X অক্ষে প্রতিটি বর্গ = 1 লিটার এবং Y অক্ষের প্রতিটি বর্গ = 50 টাকা হিসাবে একক নেওয়া হলো।

(iv) তালিকায় পাওয়া (5, 350), (10, 700), (15, 1050) এবং (20, 1400) বিন্দুগুলো বসান হলো।

(v) বিন্দুগুলোকে ক্রমে A, B, C, D নাম দিয়ে রেখায় সংযোগ করা হলে। এই AD লেখটিই আঁকতে চলা রৈখিক লেখ।



এই লেখটি মূলবিন্দু Oর মধ্য দিয়ে গেছে কি? কেন? চিন্তা করো।

এবার এই লেখটির সাহায্যে তোমরা প্রয়োজনীয় যেকোনো পরিমাণের পেট্রোলের দাম বের করতে পারবে। তার জন্য প্রথমে X অক্ষে তোমদের প্রয়োজনীয় পেট্রোলের পরিমাণ নাও এবং সেই পরিমাণের মধ্য দিয়ে যাওয়া উলম্ব রেখাটি দিয়ে লেখটি না পাওয়া পর্যন্ত ওপরের দিকে যাওয়া লেখটি পাওয়ার পর লেখটির সেই বিন্দুটিতে থাকা অনুভূমিক রেখাটি দিয়ে 'Y' অক্ষ পর্যন্ত গেলেই সেই পেট্রোলের দাম পাওয়া যাবে।

এভাবে লেখগুলো সবসময় প্রত্যক্ষ সমানুপাতে থাকে।

উদাহরণ 8 ঃ মূলধন এবং সরল সুদ (Principal & Simple Interest):

নীচের তালিকায় মূলধন এবং সরল সুদের পরিমাণ দেওয়া আছে (বাৎসরিক 5% হার সুদে)। তথ্যদেখাতে একটি রৈখিক চিত্র আঁকে।

মূলধন (টাকা)	1000	2000	3000	4000	6000
সরল সুদ (টাকা)	50	100	150	200	300

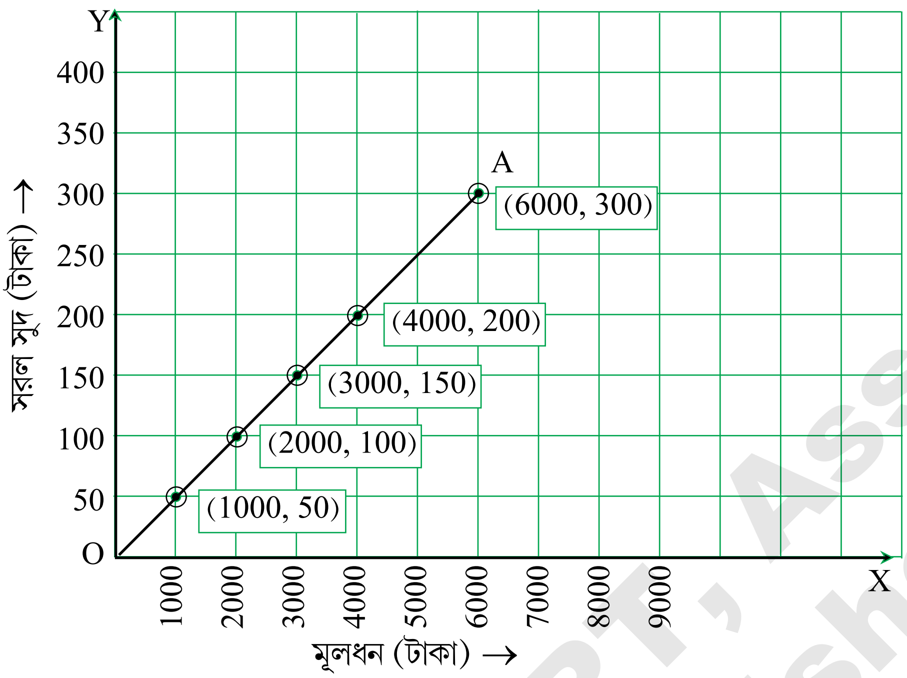
সমাধান ঃ

(i) লেখ কাগজের X অক্ষে মূলধন এবং Y অক্ষে সরল সুদ চিহ্নিত করো হল।

(ii) X অক্ষে 1 একক = 1000 টাকা এবং Y অক্ষে 1 একক = 50 টাকা হিসাবে একক নেওয়া হলো।

(iii) তথ্যের মান অনুসরণে (1000, 50), (2000, 100), (3000, 150), (4000, 200) এবং (6000, 300) বিন্দুকয়টি লেখ-কাগজে বসান হল।

(iv) বিন্দুগুলো সংযোগ করার ফলে পরের পৃষ্ঠায় $\overline{OA}$ একটি রৈখিক লেখ পাওয়া গেল।



উপরের লেখের সাহায্যে নীচের তালিকাটি পূর করো—

মূলধন (টাকায়)	2500		6500	
সরল সুদ (টাকায়)		250		400

অনুশীলনী 15.3

1. নীচের তালিকায় দেওয়া মানের সাহায্যে উপযুক্ত স্কেল ব্যবহার করি রৈখিক লেখ আঁকো ।

(a) ডিমের মূল্য—

ডিমের সংখ্যা	1	3	5	6
ডিমের মূল্য (টাকা)	6	18	30	36

(b) একটি গাড়ি অতিক্রম করো দূরত্ব—

সময় (ঘণ্টা)	1	2	3	4
দূরত্ব (কিমি)	50	100	150	200

লেখের সাহায্যে উত্তর দাও—

(i) 300 কি মি অতিক্রম করার জন্য কত সময় লাগবে ?

(ii) 5 ঘন্টার কতদূর পথ অতিক্রম করবে ?

(c) মূলধন এবং সুদের হারের উপরে—

মূলধন (টাকা)	200	500	1000	1500
সরল সুদ (টাকা)	20	50	100	150

লেখের সাহায্যে প্রশ্নকয়টির উত্তর দাও——

(i) 400 টাকার সুদ কত হবে?

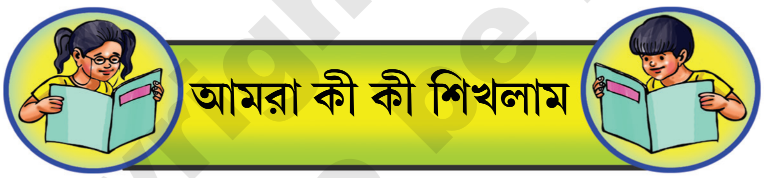
(ii) 120 টাকা সুদ লাভ করতে মূলধন কত হবে?

2. নীচের তালিকায় 6 র গুণিতকগুলো দেওয়া আছে। তার সাহায্যে একটি রৈখিক লেখ অঙ্কন করো।

X	1	2	3	4	5
Y	6	12	18	24	30

3. নীচের তালিকায় কিছুসংখ্যক সংখ্যার ঘনফল দেওয়া আছে । একটি লেখ আঁকো। লেখটি রৈখিক লেখ হয়তো ?

সংখ্যা	2	3	4	5
ঘনফল	8	27	64	125



1. সংগঠিক তথ্যকে লেখের সাহায্যে উপস্থাপন করলে বুঝতে সহজ হয়।
2. দণ্ডলেখের সাহায্যে তথ্যের তুলনা অতি সহজে করা যায়।
3. স্তম্ভলেখ এক প্রকারের দণ্ডলেখ, যেখানে শ্রেণি অন্তরালগুলো অবিচ্ছিন্নভাবে তৈরি করা থাকে।
4. রেখা-লেখের সাহায্যে দুটি তথ্যের মধ্যে সহজে তুলনা করা যায়।
5. স্থানাঙ্কের সাহায্যে কোনো নির্দিষ্ট মূল বিন্দু সাপেক্ষে কোনো স্থানের অবস্থিতি নির্ণয় করা হয়।

❑❑❑

অধ্যায়-16

সংখ্যা নিয়ে খেলা
(Fun with numbers)

C5G8T6

পূর্বের ক্লাসে তোমরা বিভিন্ন ধরণের সংখ্যা যেমন— স্বাভাবিক সংখ্যা, পূর্ণ সংখ্যা, যুগ্ম সংখ্যা, অযুগ্ম সংখ্যা, মৌলিক সংখ্যা, যৌগিক সংখ্যা, অখণ্ড সংখ্যা, পরিমেয় সংখ্যা ইত্যাদির বিষয়ে জেনে এসেছ। সেই সংখ্যাগুলোর বিভিন্ন আমোদজনক সূত্র সম্পর্কেও জেনে এসেছ।

গ্রিক দার্শনিক পাইথাগোরাস এবং তাঁর অনুগামীগণ ব্রাহ্মাণ্ডে বিরাজমান সমস্ত কিছুকে সংখ্যা দ্বারা ব্যাখ্যা করেছিলেন। এক্ষেত্রে তাঁরা যে মতবাদটি অনুসরণ করেছিলেন তাকে বলা হয় 'All is number.'

সংখ্যার ওপর অসাধারণ দক্ষতা-সম্পন্ন ভারতীয় গণিতজ্ঞ রামানুজনকে সংখ্যার বন্ধু আখ্যা দেওয়া হয়। তাঁর পুরো জীবৎকালে একমাত্র চর্চার বিষয় ছিল সংখ্যা। সংখ্যা সম্পর্কে তিনি যে সিদ্ধান্তসমূহ দিয়েছেন, তা পৃথিবীর গণিত সমাজের জন্য আজও দাবিহীন চূড়ান্ত সত্য।

এখানে কয়েকটি সংখ্যার বিভাজ্যতা, কিছু গঠনমূলক সৌন্দর্য, আকর্ষণীয় নমুনা, বিভিন্ন আমোদজনক খেলা সহ কয়েকটি অতিরিক্ত অথচ প্রয়োজনীয় বিষয় আলোচনা করা হল।

16.1 বিভাজ্যতার পরীক্ষা (Tests of Divisibility)

(i) 2, 4 ও 8 দিয়ে বিভাজ্যতা (Divisibility by 2,4 and 8)

(a) যেকোনো একটি সংখ্যা যেমন 816 নাও।

$816 = 810 + 6$

$\quad = 10 \times 81 + 6$

$\quad = 2 \times 5 \times 81 + 6$

ডান দিকের প্রথম পদটি 2 -এর গুণিতক। অতএব তা 2 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব প্রদত্ত সংখ্যাটি 2 দ্বারা বিভাজ্য হওয়া প্রয়োজন। এখানে একক ঘরের অঙ্কটি 6, 2 দ্বারা বিভাজ্য। এতএব, 816, 2 দ্বারা বিভাজ্য

অন্যদিকে 713, 2 দিয়ে বিভাজ্য নয়। কেননা এর এককের ঘরের অঙ্কটি 3 এবং তা অযুগ্ম অর্থাৎ 2 দ্বারা বিভাজ্য নয়।

একক স্থানে 0 অথবা যুগ্ম অঙ্ক থাকা যেকোনো সংখ্যা 2 দিয়ে ভাগ করা যায়

(b) যেকোনো একটি সংখ্যা যেমন 712 নাও।

$712 = 700 + 12$

$\quad = 100 \times 7 + 12$

$\quad = 4 \times 25 \times 7 + 12$

এখানে ডান দিকের প্রথম পদটি 4 -এর গুণিতক, তাই সেটা 4 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব প্রদত্ত সংখ্যাটি 4 দিয়ে ভাগ করতে হলে দ্বিতীয় পদ অর্থাৎ সংখ্যাটির ডান দিকের থেকে দুটি অঙ্কে গঠিত সংখ্যাটি 00 নয়ত 4 দ্বারা বিভাজ্য হতে হবে। এখানে প্রথম দুটি স্থানের অঙ্ক দুটি দিয়ে গঠিত সংখ্যাগুলো 12। 12 আবার 4 দিয়ে বিভাজ্য। অতএব 712 ও 4 দ্বারা বিভাজ্য। একই ভাবে 2572, 324, 576, 157792 ইত্যাদি 4 দিয়ে বিভাজ্য। অতএব, 411, 5227, 6431 ইত্যাদি 4 দ্বারা বিভাজ্য নয়।

একটি সংখ্যা 4 দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এর একক এবং দশক স্থানের অঙ্ক দুটি দিয়ে গঠিত সংখ্যাটি 00 অথবা 4 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

(c) তিনটি থেকে অধিক অঙ্ক দ্বারা গঠিত যেকোনো একটি সংখ্যা যেমন 57275 নাও

$57275 = 57000 + 275$

$= 1000 \times 57 + 275$

$= 8 \times 125 \times 57 + 275$

ডান দিকের প্রথম পদটি 8এর গুণিতক এবং তাই তা 8 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব প্রদত্ত সংখ্যাটি অর্থাৎ 57275, 8 দিয়ে বিভাজ্য হতে হলে ডান দিকের দ্বিতীয় পদটি অর্থাৎ 275 নিতে হবে। অর্থাৎ প্রদত্ত অঙ্কটির একক, দশক এবং শতক স্থানের অঙ্কগুলো দিয়ে গঠিত সংখ্যাটি 000 নয়ত 8 দ্বারা বিভাজ্য হতে হবে।

যেহেতু 275, 8 দ্বারা বিভাজ্য নয়, তাই 57275 সংখ্যাটি 8 দিয়ে বিভাজ্য নয়।

একই কারণে 2001, 45022, 743125 সংখ্যাগুলো 8 দিয়ে ভাগ করা যায় না। কিন্তু 1008, 5120, 395000, 1232 ইত্যাদি সংখ্যাগুলো 8 দিয়ে বিভাজ্য।

একটি সংখ্যার একক, দশক এবং শতকের ঘরে অবস্থিত অঙ্কগুলো দিয়ে গঠিত সংখ্যাটি 000 বা 8 দিয়ে বিভাজ্য হলে মূল সংখ্যাটিও 8 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

(ii) 5, 25 এবং 125 দ্বারা বিভাজ্যতা (Divisibility by 5, 25 and 125)

(a) যেকোনো সংখ্যা যেমন 25435 নাও

$25435 = 25430 + 5$

$= 10 \times 2543 + 5$

$= 5 \times 2 \times 2543 + 5$

ডান দিকের প্রথম পদটি 5-এর গুণিতক, তাই তা 5 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব প্রদত্ত সংখ্যাটি 5 দ্বারা বিভাজ্য হতে হলে ডান দিকের দ্বিতীয় পদটি অর্থাৎ প্রদত্ত সংখ্যাটির একক অঙ্কটি 0 নয়ত 5 দ্বারা বিভাজ্য হতে হবে। এখানে প্রদত্ত সংখ্যাটির একক স্থানে 5 আছে তাই সংখ্যাটি 5 দ্বারা বিভাজ্য।

একইভাবে, 525, 320, 4795 ইত্যাদি সংখ্যাগুলো 5 দ্বারা বিভাজ্য। অন্যদিকে 302, 441, 10283 ইত্যাদি সংখ্যাগুলো 5 দ্বারা ভাগ করা যায় না।

একটি সংখ্যার একক স্থানে 0 নয়ত 5 থাকলে সংখ্যাটি 5 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

(b) দুই বা তার থেকে বেশি অঙ্কবিশিষ্ট যেকোনো একটি সংখ্যা নাও। যেমন 3175

এখানে $3175 = 3100 + 75$

$= 100 \times 31 + 75$

$= 25 \times 4 \times 31 + 75$

ডান দিকে প্ৰথম পদটি 25-এর গুণিতক, তাই তা 25 দিয়ে বিভাজ্য। প্রদত্ত সংখ্যাটি 25 দিয়ে বিভাজ্য হতে, ডান দিকের দ্বিতীয় পদ, অৰ্থাৎ মূল সংখ্যাটির একক এবং দশক স্থানের অঙ্ক দুটি দিয়ে গঠিত সংখ্যাটি 25 দিয়ে বিভাজ্য হতে হবে। প্রদত্ত সংখ্যাটির একক এবং দশক স্থানের অঙ্ক দুটি দিয়ে গঠিত সংখ্যাটি 75 ও 75, 25 দিয়ে ভাগ করা যায়। অতএব মূল সংখ্যাটিও 25 দ্বারা বিভাজ্য।

উদাহরণস্বরূপ 350, 7100, 854325 ইত্যাদি সংখ্যাগুলো 25 দিয়ে বিভাজ্য। অন্যদিকে 4752, 3710, 111507 ইত্যাদি সংখ্যাগুলো 25 দিয়ে বিভাজ্য নয়।

একটি সংখ্যা 25 দিয়ে বিভাজ্য হবে যদি এর একক ও দশক স্থানের অঙ্ক দুটি দিয়ে গঠিত সংখ্যাটি 00 বা 25 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

(c) তিন বা ততোধিক অঙ্ক বিশিষ্ট যেকোনো একটি সংখ্যা নাও। যেমন -12350

এবার $12350 = 12000 + 350$

$= 1000 \times 12 + 350$

$= 125 \times 8 \times 12 + 350$

ডান হাতের প্রথম পদটি 125এর গুণিতক, তাই তা 125 দ্বারা বিভাজ্য। প্রদত্ত সংখ্যাটি 125 দ্বারা বিভাজ্য হতে ডান হাতের দ্বিতীয় পদ, অৰ্থাৎ মূল সংখ্যাটির একক, দশক এবং শতক স্থানে অবস্থিত অঙ্কগুলো দিয়ে গঠিত সংখ্যাটি অৰ্থাৎ 350, 125 দিয়ে বিভাজ্য হতে হবে। কিন্তু 350, 125 দিয়ে বিভাজ্য নয়, তাই মূল সংখ্যাটি 12350, 125 দিয়ে বিভাজ্য নয়।

একই ভাবে, 11251, 32503, 52310 ইত্যাদি সংখ্যাগুলো 125 দিয়ে বিভাজ্য নয়। অন্যদিকে 23000, 54250, 5750, 413250 ইত্যাদি সংখ্যাগুলো 125 দিয়ে বিভাজ্য।

একটি সংখ্যা 125 দিয়ে বিভাজ্য হবে যদি সংখ্যাটির একক, দশক এবং শতক স্থানের অঙ্ক দুটি দিয়ে গঠিত সংখ্যাটি 000 বা 125 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

(iii)3 এবং 9 দিয়ে বিভাজ্যতা (Divisibility by 3 and 9)

তিন বা ততোধিক অঙ্ক বিশিষ্ট যেকোনো একটি সংখ্যা নাও। যেমন— 23594

$23594 = 10000 \times 2 + 1000 \times 3 + 100 \times 5 + 10 \times 9 + 4$

$= (9999 + 1) \times 2 + (999 + 1) \times 3 + (99 + 1) \times 5 + (9 + 1) \times 9 + 4$

$= 9999 \times 2 + 999 \times 3 + 99 \times 5 + 9 \times 9 + (2 + 3 + 5 + 9 + 4)$

ডান হাতের প্রথম চারটি পদের প্রতিটিই 9 -এর গুণিতক। তাই সেই চারটি পদই 3 ও 9 উভয়ের দ্বারাই বিভাজ্য। যদি ডান দিকের বন্ধনীর ভিতরের যোগফলটিও 3 বা 9 দিয়ে বিভাজ্য হয় তাহলে প্রদত্ত সংখ্যাটি 3 বা 9 দিয়ে বিভাজ্য হবে।

$2 + 3 + 5 + 9 + 4 = 23$, 3 বা 9 কোনোটি দিয়েই বিভাজ্য নয়। অতএব প্রদত্ত সংখ্যাটি অৰ্থাৎ 23594 সংখ্যাটিও 3 বা 9 কোনো একটি দিয়ে ও বিভাজ্য নয়।

এর থেকে আমরা বুঝতে পারলাম যে, **কোনো একটি সংখ্যা 3 বা 9 দিয়ে বিভাজ্য হবে, যদি সংখ্যাটিতে থাকা সবকটি অঙ্কের সমষ্টি ক্রমে 3 বা 9 দ্বারা বিভাজ্য হয়।**

উদাহৰণ ঃ 123 সংখ্যাটির অঙ্কগুলোর সমষ্টি $1 + 2 + 3 = 6$, 3 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব 123, 3 দিয়ে বিভাজ্য। 563211 সংখ্যাটির ক্ষেত্রে $5 + 6 + 3 + 2 + 1 + 1 = 18$, 3 এবং 9 উভয় দ্বারাই বিভাজ্য। তাই 563211 সংখ্যা 3 ও 9 উভয় দিয়েই বিভাজ্য। অন্যদিকে, 51134এর অঙ্কগুলোর সমষ্টি অর্থাৎ $5 + 1 + 1 + 3 + 4 = 14$, 3 বা 9 দিয়ে বিভাজ্য নয়।

(iv) 6 দিয়ে বিভাজ্যতা (Divisibility by 6)

আমরা জানি যে $6 = 2 \times 3$

এর থেকে বোঝা যায় যে কোনো একটি সংখ্যা 6 দিয়ে বিভাজ্য হলে সংখ্যাটি 2 এবং 3 দিয়ে বিভাজ্য হয়। বিপরীতক্রমে, কোনো একটি সংখ্যা 2 ও 3 উভয় দিয়ে বিভাজ্য হলে বা 2×3 অর্থাৎ 6 দিয়েও বিভাজ্য হয়।

উদাভাগ ঃ 12348 সংখ্যা 2 দিয়ে বিভাজ্য। কেননা এর একক স্থানে অবস্থিত অঙ্কটি 8 এবং 2 দ্বারা বিভাজ্য। আবার, সংখ্যাটির অঙ্কগুলোর সমষ্টি $1 + 2 + 3 + 4 + 8 = 18$, 3 দিয়ে বিভাজ্য।

অতএব সংখ্যাটি $2 \times 3 = 6$ দিয়ে বিভাজ্য।

111111 সংখ্যার অঙ্ককয়টির সমষ্টি $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$, 3 দিয়ে বিভাজ্য কিন্তু তা 2 দিয়ে বিভাজ্য নয়। কারণ একক স্থানের সংখ্যাটি 1, 2 দিয়ে বিভাজ্য নয়। অতএব 111111 সংখ্যাটি 6 দিয়ে ভাগ যায় না।

একটি সংখ্যা 6 দ্বারা বিভাজ্য হয় যদি সংখ্যাটি 2 এবং 3 দুটো দিয়েই বিভাজ্য হয়।

খেয়াল রাখবে যে কোনো একটি সংখ্যা অন্য দুটি সংখ্যা দিয়ে বিভাজ্য হলে সংখ্যা দুটির গুণফল দিয়ে বিভাজ্য হওয়া কথাটি সকল ক্ষেত্রে সত্য নয়।

উদাহরণস্বরূপ 12 সংখ্যাটি 2 এবং 4 দিয়ে বিভাজ্য, কিন্তু $2 \times 4 = 8$ দিয়ে বিভাজ্য নয়। আসলে একটি সংখ্যা অন্য দুটি সংখ্যা দিয়ে বিভাজ্য হলে পরের সংখ্যা দুটির গুণফল দিয়ে ভাগ করা যায়, যদি পরের সংখ্যা দুটির গসাগু 1 হয়। **অর্থাৎ পরের সংখ্যা দুটি সহ মৌলিক বা আপেক্ষিকভাবে মৌলিক হয়।**

2 ও 3 এর ক্ষেত্রে গ সা গু 1 জন্য একটি সংখ্যা 2 এবং 3 দুটো দিয়ে বিভাজ্য হলে $2 \times 3 = 6$ দিয়েও বিভাজ্য হয়।

আবার 2 ও 4 এর ক্ষেত্রে গসাউ 2 জন্য একটি সংখ্যা 2 এবং 4 উভয় দ্বারা বিভাজ্য হলেও $2 \times 4 = 8$ দিয়ে বিভাজ্য নাও হতে পারে।

(v) 11 দিয়ে বিভাজ্যতা (Divisibility by 11)

তিন বা ততোধিক অঙ্কবিশিষ্ট যেকোনো একটি সংখ্যা নাও। যেমন 45371

এবার,
$$\begin{aligned} 45371 &= 10000 \times 4 + 1000 \times 5 + 100 \times 3 + 10 \times 7 + 1 \\ &= (9999 + 1) \times 4 + (1001 - 1) \times 5 + (99 + 1) \times 3 + (11 - 1) \times 7 + 1 \\ &= 9999 \times 4 + 1001 \times 5 + 99 \times 3 + 11 \times 7 + 1 \times 4 - 1 \times 5 + 1 \times 3 - 1 \times 7 + 1 \\ &= 11 \times 909 \times 4 + 11 \times 91 \times 5 + 11 \times 9 \times 3 + 11 \times 7 + (4 - 5 + 3 - 7 + 1) \end{aligned}$$

ডান দিকের প্রথম চারটি পদের প্রতিটিই 11-র গুণিতক। অতএব প্রদত্ত সংখ্যাটি 11 দ্বারা বিভাজ্য

হতে ডান দিকের বন্ধনীর ভিতর থাকা রাশিটি 0 অথবা 11 দিয়ে বিভাজ্য হতে হবে। এখানে বন্ধনীর ভিতরে থাকা রাশিটি, অর্থাৎ $4-5+3-7+1=-4$, 11 দিয়ে বিভাজ্য নয়। অতএব প্রদত্ত সংখ্যাটি অর্থাৎ 45371, 11 দিয়ে বিভাজ্য নহয়।

লক্ষ করো যে $4-5+3-7+1=(4+3+1)-(5+7)$ রাশিটি প্রদত্ত সংখ্যাটির অযুগ্ম এবং যুগ্ম স্থানে থাকা অঙ্কগুলোর ভিন্ন ভিন্নভাবে নেওয়া সমষ্টি দুটির পার্থক্য। অতএব যেকোনো সংখ্যা একটি 11 দ্বারা বিভাজ্য হওয়া শর্তটি এভাবে বলা যায়—

একটি সংখ্যা 11 দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি সংখ্যাটিতে যুগ্ম ও অযুগ্ম স্থানগুলোতে থাকা অঙ্কগুলোর ভিন্ন ভিন্নভাবে নেওয়া সমষ্টি দুটির পার্থক্য 0 বা 11 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

উদাহৰণ ঃ 753214 সংখ্যাটির যুগ্ম ও অযুগ্ম স্থানের অঙ্কগুলোর ভিন্ন ভিন্ন সমষ্টি দুটির পার্থক্য

$$=(7+3+1)-(5+2+4)$$
$$=11-11$$
$$=0$$

অতএব শর্তমতে 753214 সংখ্যাটি 11 দিয়ে বিভাজ্য।

একইভাবে, 9190909090 সংখ্যাটি 11 দিয়ে বিভাজ্য কারণ,

$9-1+9-0+9-0+9-0+9-0=44$, 11 দিয়ে বিভাজ্য।

লক্ষ করো যে আমাদের আলোচনা অনুসারে 11 দ্বারা বিভাজ্যতার দুটি শর্ত পাওয়া গেল। যেমন—

(A) একটি সংখ্যা *abcdefg* (সাত অঙ্কবিশিষ্ট) 11 দিয়ে বিভাজ্য হবে যদি

$$a-b+c-d+e-f+g$$
$=(a+c+e+g)-(b+d+f)$ র মান 0 নয়ত 11 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

(B) একটি সংখ্যা *abcdefg*, 11 দিয়ে বিভাজ্য হবে। যদি $efg + a$ এবং bcd র পার্থক্য 0 নয়ত 11 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

উদাহৰণ 1 ঃ 2359874 সংখ্যাটি 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 এবং 13 র কোনগুলো দ্বারা বিভাজ্য পরীক্ষা করো।

সমাধান ঃ 2, 4, 8 দিয়ে বিভাজ্যতা ঃ

সংখ্যাটির একক স্থানের অঙ্কটি 4 এবং তা যুগ্ম সংখ্যা। তাই সংখ্যাটি 2 দ্বারা বিভাজ্য। সংখ্যাটির একক এবং দশক স্থানের অঙ্কদুটি দিয়ে গঠিত সংখ্যাটি 74 এবং তা 4 দিয়ে বিভাজ্য নয়। অতএব প্রদত্ত সংখ্যাটি 4 দিয়ে বিভাজ্য নয়। একই কারণে প্রদত্ত সংখ্যাটি 8 দিয়ে বিভাজ্য নয়।

3 এবং 9 দিয়ে বিভাজ্যতা ঃ

ওপরে দেওয়া সংখ্যাটির অঙ্কগুলোর সমষ্টি হলো $2+3+5+9+8+7+4=38$ এবং এটি 3 বা 9 কোনোটির দ্বারাই বিভাজ্য নয়।

5, 25 এবং 125 দ্বারা বিভাজ্যতা ঃ

একটি সংখ্যা 5 দ্বারা বিভাজ্য হতে হলে সংখ্যাটির একক স্থানের অঙ্কটি 0 বা 5 হতে হয়। এখানে একক স্থানের অঙ্কটি 4, তাই সংখ্যাটি 5 দিয়ে বিভাজ্য নয়।

একটি সংখ্যা 5 দিয়ে বিভাজ্য না হলে 25 বা 125 দিয়েও বিভাজ্য হতে পারে না।

অর্থাৎ প্রদত্ত সংখ্যাটি 5, 25 বা 125 কোনো একটি দিয়েও বিভাজ্য নয়।

6 দিয়ে বিভাজ্যতা ঃ

সংখ্যাটি 6 দিয়ে বিভাজ্য হতে হলে তা 2 ও 3 উভয় দ্বারাই বিভাজ্য হতে হবে। কিন্তু এটি 3 দিয়ে বিভাজ্য নয়। তাই সংখ্যাটি 6 দিয়ে বিভাজ্য নয়।

7, 11, 13 দিয়ে বিভাজ্যতা ঃ

ডান দিক থেকে অঙ্কগুলো তিনটি করেই ভিন্ন ভিন্ন করা হলো। তখন ভাগগুলো হবে

874, 359 এবং 2

এখন ভাগগুলোর একটি বাদ দিয়ে যোগ করে প্রাপ্ত ভাগ দুটি হলো 874 + 2 এবং 359 বা 876 এবং 359

সমষ্টি দুটির পার্থক্য 876 – 359 = 517

এখানে 517, 11 দ্বারা বিভাজ্য, তাই প্রদত্ত সংখ্যাটি 11 দিয়ে বিভাজ্য। কিন্তু এটি 7 এবং 13 দ্বারা বিভাজ্য নয়।

উদাহৰণ 2 ঃ দেখাও যে 151452 ক 21 দিয়ে ভাগ করা যায়।

সমাধান ঃ আমরা জানি $21 = 3 \times 7$

প্রদত্ত সংখ্যাটির 3 এবং 7 দিয়ে বিভাজ্যতা পরীক্ষা করে দেখা যাক।

সংখ্যাটির অঙ্কগুলো যোগফল—

$2 + 5 + 4 + 1 + 5 + 1 = 18$ এবং 18, 3 দিয়ে বিভাজ্য। তাই প্রদত্ত সংখ্যাটি 3 দিয়ে বিভাজ্য।

আবার, সংখ্যাটির অঙ্কগুলো ডান দিক থেকে তিনটি আলাদা ভাগে সাজালে ভাগগুলো হবে 452 এবং 151

এখন $452 - 151 = 301$ এবং $301 = 7 \times 43$ অর্থাৎ 301, 7 দিয়ে বিভাজ্য।

এখন 151452 সংখ্যাটি 3 এবং 7 উভয় দ্বারাই বিভাজ্য। তার ওপর 3 ও 7-এর গসাগু 1 অর্থাৎ 3 এবং 7 সহমৌলিক সংখ্যা। এক্ষেত্রে প্রদত্ত সংখ্যাটি $3 \times 7 = 21$ দ্বারা বিভাজ্য হব।

উদাহৰণ 3 ঃ $13x$ 2741 সংখ্যাটিতে x -এর মান বার করো যাতে তা 11 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

সমাধান ঃ সংখ্যাটি 11 দিয়ে বিভাজ্য হতে এর যুগ্ম স্থান এবং অযুগ্ম স্থানগুলোতে অবস্থিত অঙ্কগুলোকে আলাদা ভাবে যোগ করে বার করা সমষ্টি দুটির পার্থক্য 0 নয়ত 11দ্বারা বিভাজ্য হতে হবে।

অর্থাৎ $(1 + 7 + x + 1) - (4 + 2 + 3)$

$= 9 + x - 9$

$= x$

এই সংখ্যাটি হয় 0 নতুবা 11 দিয়ে বিভাজ্য হতে হবে।

অর্থাৎ $x = 0$ নয়ত 11-র গুণিতক হতে হবে। কিন্তু 11র অশূন্য গুণিতকগুলো দুই বা ততোধিক অঙ্কবিশিষ্ট। অতএব $x = 0$ হতে হবে।

নির্ণেয় সংখ্যাটি 1302741

উদাহৰণ 4 ঃ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি বার করো, যাকে 2311 সঙ্গে যোগ করলে যোগফলটি (i) 3 দিয়ে বিভাজ্য (ii) 4 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

সমাধান ঃ (i) 2311-এর অঙ্কগুলোর সমষ্টি $2 + 3 + 1 + 1 = 7$, কিন্তু 7, 3 দিয়ে বিভাজ্য নয়। 7র সঙ্গে 2

যোগ করলে $7 + 2 = 9$, 3 দিয়ে বিভাজ্য হয়। অতএব প্রদত্ত সংখ্যাটির সঙ্গে 2 যোগ করলে, তা 3 দিয়ে বিভাজ্য হবে।

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতম যোগ করার সংখ্যাটি 2

(ii) 2311 সংখ্যাটি 4 দিয়ে বিভাজ্য হতে হলে এর একক ও দশক স্থানে অঙ্ক দুটি দিয়ে গঠিত সংখ্যাটি অর্থাৎ 11 সংখ্যাটি 4 দিয়ে বিভাজ্য হতে হবে। অবশ্য 11, 4 দিয়ে বিভাজ্য নয়। কিন্তু $11 + 1 = 12$, 4 দিয়ে বিভাজ্য।

অতএব 2311 -এর সঙ্গে যোগ দেওয়া ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি 1 যাতে $2311 + 1 = 2312$ সংখ্যাটি 4 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

উদাহৰণ 5 ঃ 2785 সংখ্যাটির ডান দিকে একটি অঙ্ক বসাও, যাতে নতুন সংখ্যাটি (i) 9 দিয়ে (ii) 11 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

সমাধান ঃ (i) ধরা হল সংখ্যাটি $2785x$, সংখ্যাটি 9 দিয়ে বিভাজ্য হতে হলে $2 + 7 + 8 + 5 + x$ যোগফলটি 9 দিয়ে বিভাজ্য হতে হবে অর্থাৎ $22 + x$, 9 দিয়ে বিভাজ্য হতে হবে। যেহেতু x, 0 এবং 9 -এর মধ্যে একটি চিহ্ন অতএব $22 + x$, $22 + 0$ এবং $22 + 9$ -এর মধ্যেকার সংখ্যা। অর্থাৎ $22 + x$ -এর মান 22 এবং 31 -এর মধ্যে থাকবে। 22 এবং 31 -এর মধ্যে 9 দিয়ে বিভাজ্য সংখ্যা 27 অর্থাৎ

$$22 + x = 27$$

অতএব $x = 5$

(ii) x -এর মান বের করতে হবে, যাতে $2785x$, 11দিয়ে বিভাজ্য হয়। এক্ষেত্রে, $x - 5 + 8 - 7 + 2$ অর্থাৎ $x - 2$, 11 দিয়ে বিভাজ্য হতে হবে।

অতএব, $x - 2 = 0, 11, 22....$ হতে হবে যেহেতু x -এর মান 0-র থেকে 9 পর্যন্ত যেকোনো একটি হতে পারে। অতএব $x - 2 = 0$ অর্থাৎ $x = 2$

অনুশীলনী 16.1

1. 2, 3, 5, 9 দিয়ে নীচের সংখ্যাগুলোর বিভাজ্যতা পরীক্ষা করো।

   (i) 4253 (ii) 18935 (iii) 12123232
   (iv) 8753973 (v) 333666 (vi) 785634

2. 4, 6, 8, 11 দিয়ে নীচের সংখ্যাগুলোর বিভাজ্যতা পরীক্ষা করো।

   (i) 532740 (ii) 347435 (iii) 123456
   (iv) 693011 (v) 1238932

3. 7 এবং 13 দিয়ে নীচের সংখ্যাগুলোর বিভাজ্যতা পরীক্ষা করো।

   (i) 2561876 (ii) 864192 (iii) 1604928

4. $25372x$ -এ x -এর মান বের করো, যাতে সংখ্যাটি (i) 3 দিয়ে বিভাজ্য হয়। (ii) 9 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

5. $25x043$ সংখ্যাটিতে x -এর মান বার করো যাতে সেটা 11 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

16.2 সংখ্যা দিয়ে খেলতে পারো এমন কিছু খেলা (Game with numbers)

তোমরা শ্রেণিকক্ষের ভেতরে-বাইরে অথবা অবসর সময়ে তোমাদের সঙ্গীদের সঙ্গে, নতুবা বাড়ির অন্য সদস্যর সঙ্গে সংখ্যার বিভিন্ন খেলা খেলতে পারো। এমন কিছু আশ্চর্য তথা আমোদজনক সংখ্যা আছে, যেগুলোর বিষয়ে জানলে বা সেগুলোর সঙ্গে মজা করতে শিখলে তোমরা নিশ্চয়ই আনন্দ পাবে। তখন গণিত বিষয়টি তোমাদের বন্ধুর মতো হয়ে পারবে। এসো, তেমন কিছু খেলার বিষয়ে আলোচনা করি।

(i) **আশ্চর্য প্রকৃতির চারটি সংখ্যা (Four numbers with amazing behaviour)**

চারটি বিশেষ সংখ্যা ক্রমে 153, 370, 371 এবং 407 -এর প্রকৃতি অদ্ভুত। এদের প্রত্যেকেরই অঙ্কক‌য়টির ঘনফলের সমষ্টি মূল সংখ্যাটির সমান।

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$$
$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3 = 27 + 343 + 0 = 370$$
$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3 = 27 + 343 + 1 = 371$$
$$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3 = 64 + 0 + 343 = 407$$

সত্যিই আশ্চর্য সংখ্যা নয় কি?

(ii) **37 -এর সঙ্গে মজা (Fun with 37) ঃ** 37 সংখ্যাটিতে একটি ম্যাজিক রয়েছে। একে 3 এবং 3-এর গুণিতক দ্বারা গুণ করলে গুণফলটি একটি বিশেষ ক্রমে পাওয়া যায়।

$37 \times 3 = 111$	$37 \times 18 =$ ....
$37 \times 6 = 222$	$37 \times 21 =$ ....
$37 \times 9 = 333$	$37 \times 24 =$ ....
$37 \times 12 = 444$	$37 \times 27 = 999$
$37 \times 15 = 555$	

এর পর আবার একটি নতুন ক্রম আরম্ভ হয়।

$37 \times 30 = 1110$	$37 \times 39 =$ ....
$37 \times 33 = 1221$	$37 \times 42 =$ ....
$37 \times 36 = 1332$	$37 \times 45 =$ ....
	.... × .... = ...

এছাড়াও $37037 \times 3 = 111111$

$37037037 \times 3 = 111111111$

[850 খ্রিস্টাব্দে এগুলো মহাবীরাচার্য আবিস্কার করেছিলেন। তাঁর রচিত গ্রন্থের নাম **গণিত সার সংগ্রহ**।]

(iii) **তিনটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার খেলা (Game of three consecutive numbers)**

মিলি ঃ যেকোনো তিনটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার খেলা।

রংমিলি ঃ আচ্ছা লিখলাম (9, 10, 11)

মিলি ঃ সংখ্যা তিনটি যোগ করো।

রংমিলি ঃ করলাম (9 + 10 + 11 = 30)

মিলি ঃ যোগফল কত পেলে, আমায় বলো তো।

রংমিলি ঃ 30 পেলাম

মিলি ঃ তাহলে তুমি প্রথমে লেখা সংখ্যাগুলো 9, 10 এবং 11

রংমিলি ঃ হ্যাঁ! তুমি কীভাবে জানলে? আমাকে বল তো?

মিলির কৌশলটি দেখি এসো ঃ

ধরা হল, তিনিটি ক্রমিক সংখ্যার মধ্যের সংখ্যাটি $= x$

$\therefore$ আগের সংখ্যাটি $= x - 1$ এবং পরের সংখ্যাটি $= x + 1$

$\therefore$ তিনটির যোগফল হল $= x - 1 + x + x + 1 = 3x$

$$\therefore \text{ মাধ্যের সংখ্যাটি } = \frac{\text{তিনটির যোগফল}}{3}$$

ওপরের খেলাটিতে রংমিলি বলা যোগফলটিকে মিলিয়ে 3দিয়ে ভাগ করে পাওয়া 10টি মধ্যের সংখ্যা হলে তার আগের সংখ্যাটি 9 এবং পারের সংখ্যাটি 11 হবে। অর্থাৎ সংখ্যা তিনটি ক্রমে 9, 10 এবং 11 হবে।

একইভাবে, $1 + 2 + 3 = 2 \times 3 = 6$

$3 + 4 + 5 = 4 \times 3 = 12$

$9 + 10 + 11 = 10 \times 3 = 30$

একসাথে ভাগ করে দেখো ঃ

(i) $24 + 25 + 26$ (ii) $28 + 29 + 30$ (iii) $69 + 70 + 71$

(iv) **চারটি ক্রমিক সংখ্যার খেলা (Game with four consecutive numbers)**

এবার খেলাটি রংমিলি আরম্ভ করল—

রংমিলি: মিলি, তুমি চারটি ক্রমিক সংখ্যা আমাকে না দেখিয়ে তোমার খাতায় লেখো।

মিলি: ঠিক আছে লিখলাম (2, 3, 4, 5)

রংমিলি: সংখ্যা চারটি যোগ করো

মিলি: আচ্ছা করলাম $2 + 3 + 4 + 5$

রংমিলি: যোগফলটি আমাকে বলো

মিলি: যোগফল 14

রংমিলি ঃ তাহলে তুমি লেখা সংখ্যাগুলো হচ্ছে 2, 3, 4 এবং 5

মিলি ঃ এত তাড়াতাড়ি তুমি কীভাবে জানলে?

রংমিলির কৌশলটি দেখি এসো ঃ

ধরা হল, চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা ক্রমে $x, x+1, x+2$ এবং $x+3$

এখন চারটির যোগফল $= x + x + 1 + x + 2 + x + 3$

বা, যোগফল $= 4x + 6$

বা, $4x =$ যোগফল $- 6$

বা, $x = \dfrac{\text{যোগফল} - 6}{4}$

চারটি সংখ্যার যোগফল মিলে পেয়েছিলে 14 ।

অতএব মিলির প্রথম সংখ্যাটি হল $= \dfrac{14-6}{4} = 2$

অতএব, সংখ্যা চারটি ক্রমে হবে 2, 3, 4 এবং 5

একইভাবে, $3 + 4 + 5 + 6 = 3 \times 4 + 6 = 18$

$5 + 6 + 7 + 8 = 5 \times 4 + 6 = 26$

বিকল্পভাবে সংখ্যা চারটির মধ্যে দুটিকে যোগ করে 2 দিয়ে গুণ করলেও সংখ্যাগুলির যোগফল পাওয়া যাবে। যেমন —

$9 + (10 + 11) + 12 = (10 + 11) \times 2 = 42$

$15 + (16 + 17) + 18 = (16 + 17) \times 2 = 66$

এক সাথে ভাগ করে দেখো

(i) $7 + 8 + 9 + 10$ (ii) $12 + 13 + 14 + 15$ (iii) $20 + 21 + 22 + 33$

(v) **9 এর খেলা (Game of 9) ঃ**

এবার পঙ্কজ, পারভেজ, মানস ও ডেনিয়েল মিলে সংখ্যার অন্য ধরণের একটি আমোদজনক খেলা খেলতে আরম্ভ করল। দুটি অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার খেলা —

পঙ্কজ: দুটি অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যা ভাবো

এখন সংখ্যাগুলোর অঙ্কগুলি উল্টো করে দাও

পারভেজ: ভাবলাম (24)

দিলাম 42 পেলাম

মানস: ভাবলাম (20)

দিলাম 02 পেলাম

ডেনিয়েল: ভাবলাম (91)

দিলাম 19 পেলাম

এবার বড় সংখ্যাটির থেকে ছোট সংখ্যাটি বিয়োগ করো

বিয়োগ করলাম $42 - 24 = 18$ পেলাম

বিয়োগ করলাম $20 - 02 = 18$ পেলাম

বিয়োগ করলাম $91 - 19 = 72$ পেলাম

বিয়োগফলটি 9 দিয়ে ভাগ করো। নিশ্চয়ই কোনো ভাগশেষ নেই! বিয়োগফলটি 9 -এর গুণিতক।

$18 \div 9 = 2$ হ্যাঁ! কিন্তু তুমি কীভাবে জানলে?

$18 \div 9 = 2$ হ্যাঁ! কিন্তু তুমি কীভাবে জানলে?

$72 \div 9 = 8$ হ্যাঁ! কিন্তু তুমি কীভাবে জানলে?

এখন খেলার কৌশলটি ব্যাখ্যা করে দেখি এসো—

ধরা হল, ডেনিয়েল দুটি অঙ্ক বিশিষ্ট যেকোনো একটি সংখ্যা ab বেছে নিল, যার সাধারণ রূপ $10a + b$। এখন সংখ্যাটির অঙ্কদুটি বার করে দিলে নতুন পাওয়া সংখ্যাটি হবে $ba = 10b + a$,

যদি $a > b$ হয়, তাহলে $(10a + b) > (10b + a)$ হবে। এবার বড়টির থেকে ছোটটি বিয়োগ করলে—

$$\begin{aligned}(10a + b) - (10b + a) &= 10a + b - 10b - a \\ &= 9a - 9b \\ &= 9(a - b)\end{aligned}$$

যে সংখ্যাটি; পঙ্কজ বলার মতো, 9 -এর গুণিতক হবে।

এক সাথে ভাগ করে দেখি এসো—

(i) 16 (ii) 45 (iii) 62

(vi) **1089-এর খেলা (Game of 1089) ঃ**

তিনটি অঙ্ক দ্বারা গঠিত একটি সংখ্যা নাও। কিন্তু অঙ্কগুলো একই যেন না হয়।

নিলাম

এখন সেই সংখ্যার অঙ্কগুলো দ্বারা গঠন করা যায় এমন সব থেকে বড় এবং সব থেকে ছোট সংখ্যাদুটি নাও

ঠিক আছে নিলাম 831 ও 138

বড় থেকে ছোটটি বিয়োগ করো

করলাম $831 - 138 = 693$

নতুন সংখ্যাটি উল্টে দাও এবং সেই দুটি যোগ করো

693 + 396 = 1089 পেলাম

যোগফলটি 1089 নয় কি?

হ্যাঁ! কিন্তু তুমি কীভাবে জানলে?

আচ্ছা, খেলাটি কী ছিল? আসলে অসমান অঙ্কগুলোর যেকোনো তিনটি অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা থেকে প্রদত্ত নির্দেশ মতে এগোলে শেষে 1089 পাওয়া যাবে।

একসাথে ভাগ দেখো

(i) 327 (ii) 291 (iii) 456 (iv) 786

টীকা ঃ

এই 1089 সংখ্যাটি কাপ্রেকর সংখ্যা (Kaprekar Number) নামে বিখ্যাত। মহারাষ্ট্রের নাসিকের কাপ্রেকর নামক একজন স্কুল শিক্ষক এই খেলাটির আবিষ্কারক ছিলেন।

এই সংখ্যাগুলোর কয়েকটি চমৎকার ফল—

$1089 \times 1 = 1089, \longleftrightarrow 9801 = 1089 \times 9$

$1089 \times 2 = 2178, \longleftrightarrow 8712 = 1089 \times 8$

$1089 \times 3 = 3267, \longleftrightarrow 7623 = 1089 \times 7$

$1089 \times 13 = 14,157 \longleftrightarrow 75,141 = 1089 \times 69$

বাঁদিকে এবং ডান দিকের গুণফলগুলো ভালো করে লক্ষ করো। কোনো বিশেষত্ব পেলে কি?

আবার,

$33^2 = 1089$

$333^2 = 110889$

$3333^2 = 11108889$ ..... ইত্যাদি।

(vii) **1001 র খেলা (Game of 1001) ঃ**

তিনটি অঙ্ক দিয়ে গঠিত একটি সংখ্যা নাও (যেমন 125)

সেটিকে দুবার লেখো 125125

এখন এই সংখ্যাটিকে 7 দিয়ে ভাগ করো (ভাগফল 17875)

এই ভাগফলকে 11 দিয়ে ভাগ করো (ভাগফল 1625)

শেষে এই ভাগফল 13 দিয়ে ভাগ করো (ভাগফল 125)।

অর্থাৎ মূল সংখ্যাটি পাওয়া গেল।

লক্ষ্য করো,

$7 \times 11 \times 13 = 1001$,

অতএব 1001দিয়ে ভাগ করলেও ভাগফল 125 ই পাওয়া যাবে।

(i) বিপরীত পক্ষে $125125 = 125 \times 1001$,

(ii) 125125125125 ধরলে, এই সংখ্যাটি $= 125 \times a$, $a=?$

খেলাটির কৌশলটি ব্যাখ্যা করে দেখি এসো—

আসলে যেকোনো তিনটি অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার পাশে সেই সংখ্যাটি লিখে পাওয়া ছয়টি অঙ্কবিশিষ্ট নতুন সংখ্যাটি আগের সংখ্যার 1001 গুণ। এখানে $125125 = 125{,}000 + 125$

$$= 125(1000 + 1) = 125 \times 1001$$

$\therefore a = 1001$ আবার $7 \times 11 \times 13 = 1001$ এবার কারণটি বুঝলে কি?

এক সাথে ভাগ করে দেখো

(i) 234 (ii) 175 (iii) 432

16.3 কয়েকটি সাংখ্যিক নমুনা (Some numerical patterns)

(i) নীচের প্রক্রিয়াগুলি লক্ষ করো।

$9 \times 9 = 81$,	$9 + 9 = 18$
$24 \times 3 = 72$	$24 + 3 = 27$
$47 \times 2 = 94$	$47 + 2 = 49$
$497 \times 2 = 994$	$497 + 2 = 499$

(ii) অন্য এক গঠন

$9 \times 9 + 7 = 88$

$98 \times 9 + 6 = 888$

$987 \times 9 + 5 = 8888$

$98765432 \times 9 + 0 = 88888888$

$987654321 \times 9 + (-1) =$

$9876543210 \times 9 + (-2) =$

(শূন্য স্থানগুলো অনুমানে পূর্ণ করো। সত্যিই পূর্ণ করে মিলেছে কি না দেখো)। আমোদজনক নয় কি?

(iii) $6^2 - 5^2 = 11 \times 1$

$(56)^2 - (45)^2 = 101 \times 11$

$(556)^2 - (445)^2 = 1001 \times 111$ ইত্যাদি

(iv) এই সংখ্যাটি লক্ষ্য করো 3816547290

0 -র থেকে 9 পর্যন্ত সবগুলো সাংখ্যিক চিহ্ন দিয়ে গঠিত সংখ্যাটির বৈশিষ্ট্য হলো এর বাঁদিক থেকে ক্রম অনুসারে নেওয়া যে কোনো সংখ্যক অঙ্কের সমষ্টি সেই সমষ্টির অঙ্কের সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য হয়। যেমন 1 | 3, 2 | 38, 3 | 381, 4 | 3816 .... ইত্যাদি। এখানে | চিহ্ন টি বাঁদিকের সংখ্যাটি দিয়ে ডান দিকের সংখ্যাটিকে ভাগ করা বোঝাচ্ছে।

(v) $\frac{148}{296}+\frac{35}{70}=1$

(আচ্ছা বিশেষত্বটা কী?)

(vi) সংখ্যার বর্গের কয়েকটি চিহ্ন (Some Patterns of Square of Numbers)

আমরা জানি যে যেকোনো সংখ্যাকেই বর্গ করা যায়। কিন্তু সকল সংখ্যাই বর্গ সংখ্যা নয়। এখানে আমরা বিশেষ সংখ্যা বর্গ করলে যে আকর্ষণীয় সংখ্যার দৃষ্টিনন্দন চিহ্ন পাওয়া যাবে সে বিষয়ে উল্লেখ করব।

(a) একটি নমুনা বা চিহ্ন এরকম—

$$4^2 = 16$$
$$34^2 = 1156$$
$$334^2 = 111556$$
$$3334^2 = 11115556$$
$$33334^2 = 1111155556$$
$$333334^2 = 111111555556$$

এর নীচে নীচে তোমরা নিজে আরো কয়েকটি লেখো।

(b)

$1^2 =$ 1

$11^2 =$ 1 2 1

$111^2 =$ 1 2 3 2 1

$1111^2 =$ 1 2 3 4 3 2 1

$11111^2 =$ 1 2 3 4 5 4 3 2 1

$111111^2 =$ 1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1

$1111111^2 =$ 1 2 3 4 5 6 7 6 5 4 3 2 1

↑
মধ্যস্তম্ভ

এই নমুনাটিতে তোমরা কী কী বিশেষ গঠন দেখতে পেলে? প্রথমে লক্ষ্য করো যে, একটি সংখ্যা বর্গ করার যে সংখ্যাটি পেয়েছ তার মধ্য স্তম্ভের অঙ্কটির ডানদিক এবং বাঁদিক একই অঙ্ক দিয়ে গঠিত।

[ডান দিকে থেকে মধ্যস্তম্ভ পর্যন্ত এবং বাঁদিক থেকে মধ্যস্তম্ভ পর্যন্ত একই অঙ্ক থাকা এই নমুনাটিকে প্যালিনড্রম (Palindrome) বলা হয়। বিভিন্ন ভাষার ক্ষেত্রেও প্যালিনড্রম সদৃশ শব্দ বা বাক্য পাওয়া যায়। যেমন— রবার, নবীন, নন্দনন্দন, Madam I' m Adam ইত্যাদি।] আবার লক্ষ্য করো যে, যে সংখ্যাটির বর্গ করেছ সেখানে যতটি এক আছে সেই সংখ্যাটি বর্গ করতে পাওয়া সংখ্যাটির মধ্যস্তম্ভতে আছে। উদাভাগস্বরূপ একেবারে শেষে $(1111111)^2$ কে বর্গ করা হয়েছে। এখানে মোট 7 টি এক আছে। এখন এই সংখ্যাটির বর্গ হল 1 2 3 4 5 6 7 6 5 4 3 2 1 এবং এর মধ্যে থাকা অঙ্কটি 7।

সংখ্যার ত্রিভুজাকৃতির এই নমুনাটির নাম পাস্কেল ত্রিভুজ (Pascal's triangle)।

(c) নীচের চিহ্ন গুলো লক্ষ্য করো—

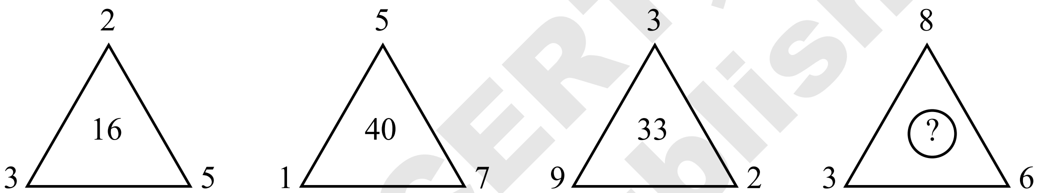
$$9^2 = 81$$
$$99^2 = 9801$$
$$999^2 = 998001$$
$$9999^2 = 99980001$$

এখানে এর নীচে আরো কয়েকটি লিখে এই নমুনায় থাকা বিশেষত্বগুলো অনুধাবন করতে চেষ্টা করো।

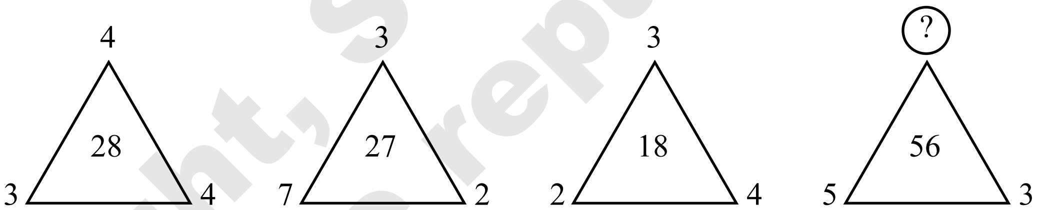
অনুশীলনী 16.2

দেখো, উদঘাটন করো এবং শূন্যস্থান পূর্ণ করে কৌশলটি লেখো ঃ

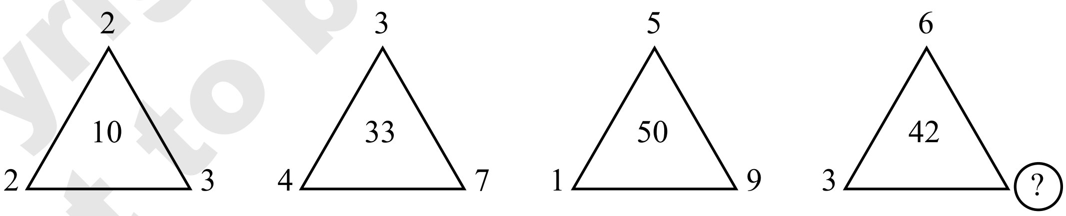
1. (a)



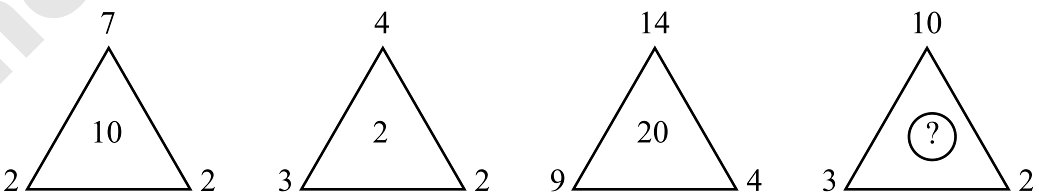
(b)



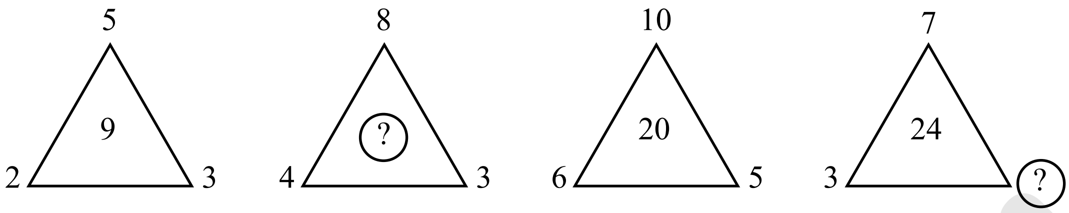
(c)



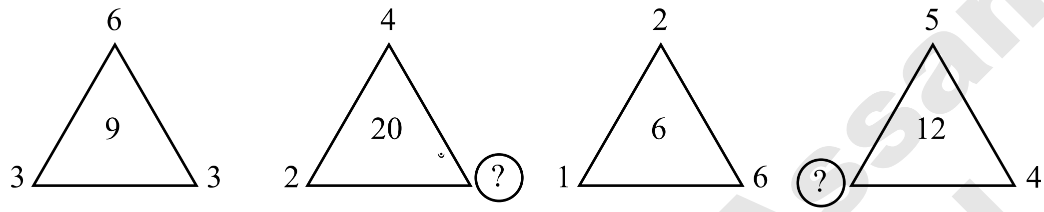
2. (a)



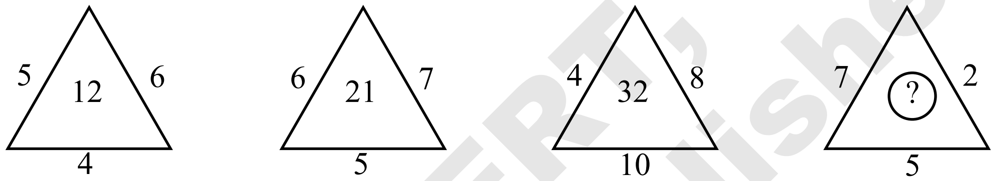
(b)



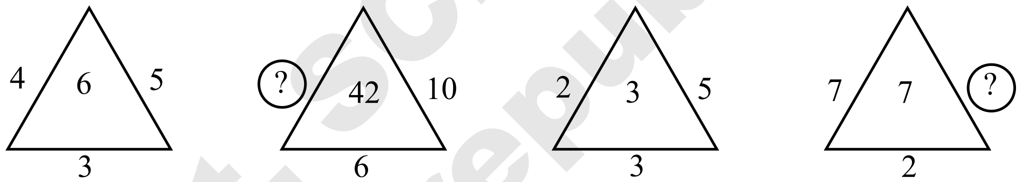
(c)



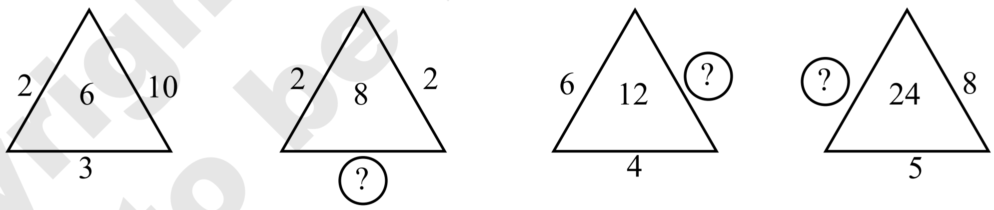
3. (a)



(b)



(c)



16.4 অঙ্কের বদলে অক্ষরের খেলা (Game with lettters for digits)

এই দফায় কিছু গাণিতিক সমস্যায় অঙ্ক (Digit)-এর বদলে অক্ষর ব্যবহার করা হয়েছে। আমরা তার সমাধানের কৌশলের অনুশীলন করব। এই ক্ষেত্রে আমরা কেবল যোগ ও গুণ প্রক্রিয়া ব্যবহার করে কিছু সমস্যা সমাধান করতে শিখব।

এধরনের সমস্যা সমাধান করতে আমরা নীচের কয়েকটি নীতি মেনে চলব।

(ক) প্রতিটি সমস্যায় থাকা প্রতিটি অক্ষর কেবল একটি অঙ্কের জন্য ব্যবহার হবে। একটি অঙ্ককে কেবল একটি অক্ষরের দ্বারা সূচিত করতে হবে।

(খ) একটি সমস্যায় থাকা কোনো সংখ্যা দ্বারা প্রথম অঙ্কটি শূন্য হতে পারে না।

(গ) সমস্যাটির একটিই উত্তর হবে।

নীচের উদাহরণগুলি লক্ষ্য করি এসো —

উদাভাগ 1 ঃ

$$\begin{array}{rcc} & A & 4 \\ + & 1 & B \\ \hline & 4 & 9 \end{array}$$

A এবং Bর মান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ ওপরের যোগের সমস্যাতে থাকা A এবং B কোনো দুটি অঙ্কের বদলে ব্যবহার হয়েছে। আমাদের A ও B-র মান বার করতে হবে। যেখানে A এবং B দুটি ভিন্ন মান বোঝাচ্ছে।

স্তর 1 ঃ প্রথমে এককের ঘরের যোগটি দেখো। 4 + B = 9; অর্থাৎ B এমন একটি সংখ্যা যার সঙ্গে 4 যোগ করলে 9 হবে। অতএব নিশ্চিতভাবে B-র মান 5 হবে। কারণ 4 + 5 = 9।

স্তর 2 ঃ এইবার দশকের ঘরটি খেয়াল করো। A + 1 = 4; অর্থাৎ A এমন একটি সংখ্যা যার সঙ্গে 1 যোগ করলে 4 হবে অতএব A-র মান 3 অর্থাৎ, সমস্ত সমস্যাটির সমাধান হবে—

দশক		একক	
A =	3		4
+	1	B =	5
	4		9

উত্তর ঃ A = 3 এবং B = 5

উদাভাগ 2 ঃ

$$\begin{array}{rccc} & 5 & A & B \\ + & A & B & 2 \\ \hline & B & 7 & 8 \end{array}$$

A এবং B-র মান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ এটি একটি তিন অঙ্ক বিশিষ্ট যোগের সমস্যা। অতএব তিনটি স্তরে করতে হবে।

স্তর 1 ঃ প্রথমে এককের ঘরের যোগটি দেখো। B + 2 = 8; অর্থাৎ B -র সঙ্গে 2 যোগ করলে 8 হবে। যেহেতু 6 + 2 = 8। অতএব B = 6 হবে।

স্তর 2 ঃ দশকের ঘরে A + B = 7 আছে। যেহেতু B-র মান আমরা 6 পেয়েছি। এখন A-র মান এমন হবে, যার সঙ্গে 6 যোগ করলে 7 হবে। অতএব A -র মান 1 হলে 1 + 6 = 7 হবে। অর্থাৎ A = 1।

স্তর 3 ঃ শতকের ঘরে 5 + A = B আছে। যেহেতু আমরা A = 1 এবং B = 6 পেয়েছি। অতএব 5 + 1 = 6 হবে।

এখন সমগ্র সমস্যাটির সমাধান হবে—

শতক			দশক		একক	
		5	A=	1	B=	6
+	A=	1	B=	6		2
	B=	6		7		8

উত্তর ঃ A = 1 এবং B = 6

উদাহরণ 3 ঃ

$$\begin{array}{cccc} & A & B & B \\ + & A & B & B \\ + & A & B & B \\ \hline 1 & 9 & A & B \end{array}$$

A এবং B-র মান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ এই সমস্যাটি ওপরের দুটি থেকে কিছু ভিন্ন। এর সমাধান করতে অল্প সাবধান হতে হবে।

স্তর 1 ঃ এককের ঘরের তিনটি B-র যোগফলটি এমন একটি সংখ্যা, যার এককের ঘরের অঙ্কটি B হবে। এটি কেবল B = 0 এবং B = 5-এর ক্ষেত্রে সম্ভব হবে। কিন্তু B = 0 টি দশকের ঘরের শর্ত পূরণ করে না। অতএব B = 5; 5 + 5 + 5 = 15 (এককের ঘরে 5 = B) টি আমরা গ্রহণ করব। অর্থাৎ, এই সমস্যায় B = 5 হবে।

স্তর 2 ঃ শতকের ঘরের তিনটি A-র মান 6 বসালে, 6 + 6 + 6 = 18 পাব। দশকের ঘর থেকে হাতে থাকা 1 শতক যোগ হয়ে 18 + 1 = 19 পাব।

অর্থাৎ সমস্ত সমস্যাটির সমাধান হবে—

হাজার	শতক	দশক	একক
	1	1	
+	A= 6	B= 5	B= 5
	A= 6	B= 5	B= 5
	A= 6	B= 5	B= 5
1	9	A= 6	B= 5

উদাভাগ 4 ঃ

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ \times & & B \\ \hline C & A & B \end{array}$$

A, B এবং C -এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ এটি কেবল তিনটি অক্ষরের গুণের সমস্যা।

স্তর 1 ঃ এককের ঘরে দুটি B র যোগফলটি এমন একটি সংখ্যা যার এককের ঘরের অঙ্কটি B ই হবে। এটি B = 0, 5-এবং 6 -এর ক্ষেত্রেই সম্ভব। কিন্তু B = 0 হলে দশকের ঘরের গুণফলটিতে '0' হতে হবে। যা এই সমস্যাটির নীতিবিদ্ধ। অতএব B র সম্ভাব্য মান 5 বা 6 হতে হবে।

স্তর 2 ঃ এখন $(10A + B) \times B = 100C + 10A + B$ তে B = 5

ধরলে, $(10A + 5) \times 5 = 100C + 10A + 5$

বা, $50A + 25 = 100C + 10A + 5$

বা, $50A - 10A + 25 - 5 = 100C$

বা, $40A + 20 = 100C$

বা, $2A + 1 = 5C$ (20 দিয়ে ভাগ করি)

অর্থাৎ $2A + 1$-র মান 5-র গুণিতক, কিন্তু অযুগ্ম সংখ্যা।

অতএব, $2A + 1 = 5$ নাইবা $2A + 1 = 15$

বা $A = 2$ বা $A = 7$

অতএব $A = 2 \Rightarrow 2 \times 2 + 1 = 5C$

বা $5 = 5C$

$\therefore \quad C = 1$

এবং $A = 7 \Rightarrow 2 \times 7 + 1 = 5C$

বা $15 = 5C$

$\therefore \quad C = 3$

অতএব $A = 2, B = 5$ এবং $C = 1$ হবে।

তাহলে সমস্যাটি সমাধান হবে—

$$\begin{array}{cccccc} & & A= & 2 & B= & 5 \\ & & \times & & B= & 5 \\ \hline C= & 1 & A= & 2 & B= & 5 \end{array}$$

উত্তর ঃ $A = 2$ এবং $B = 5$ এবং $C = 1$

অনুশীলনী 16.3

1. নীচের প্রতিটি সংখ্যায় অবস্থিতি অক্ষরগুলোর মান নির্ণয় করো (স্তর অনুসরণে)

(i) $\begin{array}{cccc} & & 6 & A \\ + & & 8 & 7 \\ \hline & B & A & 2 \end{array}$ (ii) $\begin{array}{cccc} & 2 & 1 & A \\ + & 1 & A & 3 \\ \hline & 3 & 6 & 8 \end{array}$ (iii) $\begin{array}{cccc} & 1 & A & B \\ + & A & B & 1 \\ \hline & B & 0 & 7 \end{array}$ (iv) $\begin{array}{cccc} & B & 2 & A \\ + & 3 & A & B \\ \hline & A & 0 & 0 \end{array}$

(v) $\begin{array}{ccccc} & 3 & 0 & A & 6 \\ + & 4 & 2 & 4 & B \\ + & A & 3 & B & 6 \\ \hline & C & 6 & A & 7 \end{array}$ (vi) $\begin{array}{ccccc} & & A & A & A \\ + & & A & A & A \\ + & & A & A & A \\ \hline & C & B & B & A \end{array}$ (vii) $\begin{array}{cccc} & & A & B \\ \times & & & 3 \\ \hline & C & A & B \end{array}$ (viii) $\begin{array}{cccc} & & B & A \\ & \times & B & 3 \\ \hline & 5 & 7 & A \end{array}$

(ix) $\begin{array}{cccc} & & A & B \\ \times & & & 6 \\ \hline & C & B & B \end{array}$ (x) $\begin{array}{cccc} & & A & B \\ \times & & & 6 \\ \hline & B & B & B \end{array}$ (xi) $\begin{array}{cccc} & & A & B \\ \times & & & 5 \\ \hline & C & A & B \end{array}$ (xii) $\begin{array}{cccc} & & A & B \\ & \times & A & B \\ \hline & C & A & B \end{array}$

আমরা কী শিখলাম ?

1. **2, 4 এবং 8 দিয়ে বিভাজ্যতা**

   একক স্থানে 0 অথবা যুগ্ম অঙ্ক রয়েছে এমন যেকোনো সংখ্যা 2 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

   একটি সংখ্যা 4 দ্বারা বিভাজ্য হবে, যদি এর একক, দশক ও শতকের স্থানে থাকা অঙ্কগুলো দ্বারা গঠিত সংখ্যাটি 00 বা 4 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

   একটি সংখ্যার একক, দশক ও শতকের স্থানে থাকা অঙ্কগুলো দ্বারা গঠিত সংখ্যাটি 000 বা 8 দিয়ে বিভাজ্য হলে মূল সংখ্যাটিও 8 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

2. **5, 25 এবং 125 দ্বারা বিভাজ্যতা**

   একটি সংখ্যার একক স্থানে 0 বা 5 থাকলে সংখ্যাটি 5 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

   একটি সংখ্যা 25 দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এর একক ও দশক স্থানের অঙ্ক দুটি দিয়ে গঠিত সংখ্যাটি 00 বা 25 দিয়েই বিভাজ্য হয়।

   একটি সংখ্যা 125 দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি সংখ্যাটির একক, দশক এবং শতক স্থানে অঙ্কগুলোর দ্বারা গঠিত সংখ্যাটি 000 বা 125 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

3. **3 এবং 9 দিয়ে বিভাজ্যতা**

   কোনো একটি সংখ্যা 3 বা 9 দিয়ে বিভাজ্য হবে যদি সংখ্যাটিতে অবস্থিত সবকয়টি অঙ্কের সমষ্টি ক্রমে 3 বা 9 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

4. **6 দিয়ে বিভাজ্যতা**

   একটি সংখ্যা 6 দিয়ে বিভাজ্য হয় যদি সংখ্যাটি 2 ও 3 উভয় দ্বারা বিভাজ্য হয়।

   একটি সংখ্যা 6 দিয়ে বিভাজ্য হলে পরের সংখ্যা দুটির গুণফল দিয়ে ভাগ করা যাবে যদি পরের সংখ্যা দুটির গসাউ 1 হয়। অর্থাৎ পরের সংখ্যা দুটি সহ মৌলিক বা আপেক্ষিকভাবে মৌলিক হয়।

5. **11 দিয়ে বিভাজ্যতা**

   একটি সংখ্যা 11 দিয়ে বিভাজ্য হবে যদি সংখ্যাটিতে যুগ্ম ও অযুগ্ম স্থানগুলোতে থাকা অঙ্কগুলোর ভিন্ন ভিন্ন ভাবে নেওয়া যোগফল দুটির পার্থক্য 0 বা 11 দ্বারা বিভাজ্য হয়।

6. সংখ্যা দিয়ে খেলবার মত কিছু খেলা।
7. অঙ্কের বদলে অক্ষরের খেলা।

❑❑❑

উত্তরাবলি

অনুশীলনী 1.1

1. (i) সত্য (ii) অসত্য (iii) অসত্য (iv) সত্য (v) সত্য (vi) সত্য
   (vii) অসত্য (viii) অসত্য (ix) অসত্য (x) সত্য

2. (i) $\frac{7}{9}$ (ii) -3 (iii) $\frac{2}{8}$ (iv) $\frac{19}{7}$ (v) $\frac{a}{c}$

3. $\frac{20}{11}$ এবং $-\frac{5}{6}$

4. (i) $-\frac{1}{13}$ (ii) $\frac{63}{8}$ (iii) $-\frac{5}{4}$ (iv) -1
   (v) $\frac{5}{2n}$

5. হয় না, যেহেতু $-1\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}\neq 1$

6. 1, -1

7. $-\frac{9}{4}$ এবং $\frac{16}{11}$

8. (i) $\frac{3}{2}$, (ii) $-\frac{12}{5}$

9. 1 এবং -1

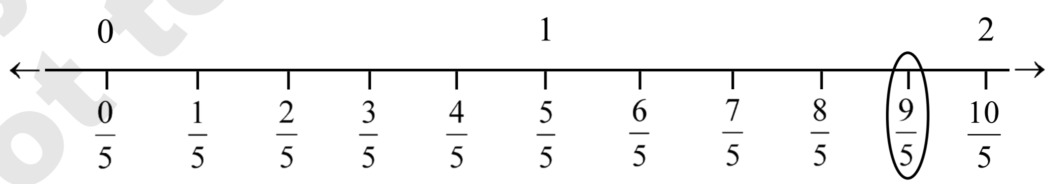
10. $\frac{-5}{2}$

11. (i) ক্রম বিনিময় সূত্র (ii) যোগাত্মক অভেদ (iii) গুণাত্মক অভেদ

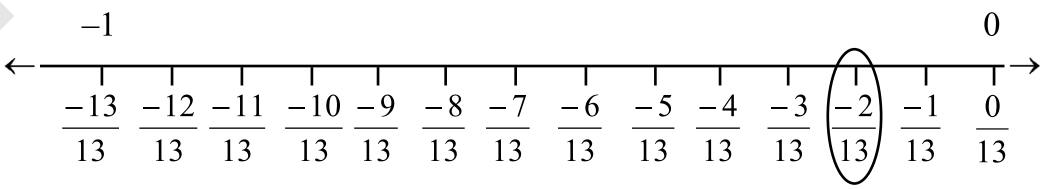
12. (i) $\frac{61}{35}$ (ii) $\frac{21440}{33}$ (iii) $\frac{21}{40}$ (iv) $\frac{1}{5}$ (v) $\frac{11}{6}$ (vi) $\frac{-64}{315}$
    (vii) $-\frac{1}{2}$

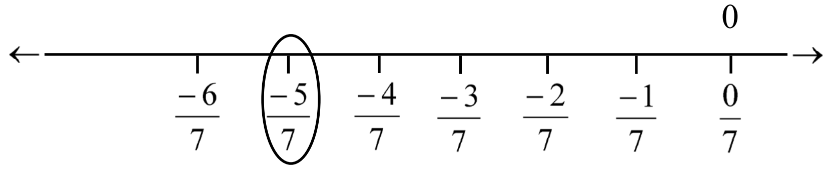
অনুশীলনী 1.2

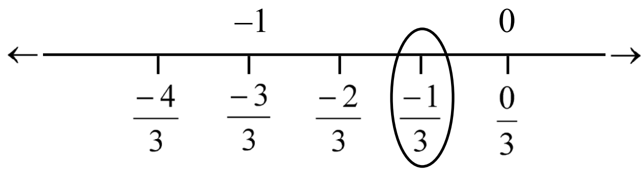
1. (i)

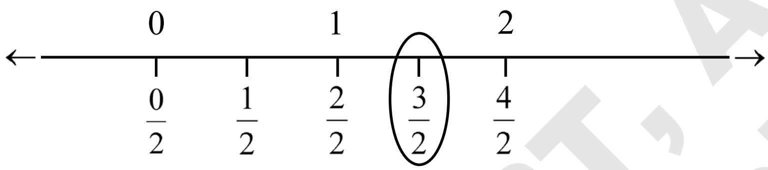


(ii)



(iii)


(iv)


(v)


অনুশীলনী 2.1

1. (i) 4 (ii) 3 (iii) 2 (iv) 49
   (v) 1 (vi) – 60 (vii) 1 (viii) $\frac{11}{8}$
   (xi) $\frac{21}{2}$ (x) $-\frac{1}{12}$ (xi) $-\frac{2}{3}$ (xii) $\frac{2}{3}$

2. (i) $x = 2$ (ii) $y = -1$ (iii) $y = 5$ (iv) $x = 1$
   (v) $x = \frac{1}{3}$ (vi) $p = 4$

3. (i) –3 (ii) – 9 (iii) $\frac{10}{11}$ (iv) – 25
   (v) 7 (vi) 4 (vii) – 7 (viii) 1
   (xi) 36 (x) $-\frac{7}{2}$ (xi) 19 (xii) $\frac{4}{3}$
   (xiii) 9 (xiv) $-\frac{10}{3}$ (xv) $\frac{6}{5}$ (xvi) –20

অনুশীলনী 2.2

1. 30, 42
2. 14, 15, 16
3. 2500 টাকা, 5000 টাকা এবং 10,000 টাকা
4. দৈর্ঘ্য = 94 মিটার
   প্রস্থ = 46 মিটার
5. 45
6. 8 সেমি, 10 সেমি, 11 সেমি
7. 12
8. 15, 16, 17
9. 12, 13, 14
10. 6 বছর
11. রাজ 40 বছর
    রশ্মি 20 বছর
12. 50 টাকায় 4 টি, 20 টাকায়া 15 টি
13. 26
14. 45
15. $-\frac{1}{10}$
16. 5 ঘণ্টা
17. 320 টাকা
18. $\frac{5}{9}$
19. $\frac{2}{7}$
20. রোহন 12 বছর
    মাক 37 বছর
21. 100000 টাকা
22. 725

MCQ

1. (c)	2. (c)	3. (d)	4. (b)	5. (b)
6. (a)	7. (b)	8. (d)	9. (b)	10. (c)
11. (b)	12. (d)	13. (b)	14. (a)	15. (c)

অনুশীলনী 3.1

2. (i) 9 (ii) 20 (iii) 27 (iv) 35
3. (i) 720°, 120° (ii) 1260°, 140° (iii) 1800°, 150°
4. (i) 105° (ii) $a = 108^\circ$, $b = 72^\circ$ (iii) $a = 150^\circ$, $b = 100^\circ$
   (iv) $a = 60^\circ$, $b = 50^\circ$ (v) $a = 30^\circ$, $b = 110^\circ$
5. 12
6. 18°
7. (i) 6 (ii) 10 (iii) 15 (iv) 8 (v) 24
8. (i) 1800° (ii) 2160° (iii) 3240° (iv) 3960° (v) 4140°
9. (i) সত্য (ii) মিথ্যা (iii) মিথ্যা (iv) সত্য (v) সত্য

অনুশীলনী 3.2

1. (i) $9 = 95^\circ$ (ii) $a = 75^\circ, b = 105^\circ, c = 75^\circ$ (iii) $a = 30^\circ, b = 30^\circ$
   (iv) $a = 6, b = 4$ (v) $a = 17, b = 8, c = 15$ (vi) $a = 115^\circ, b = 75^\circ, c = 115^\circ$
   (vii) $x = 5, y = 5$ (viii) 18 (ix) 21
   (x) 37° (xi) $x = y = 56^\circ$ (xii) $x = 80^\circ$
2. $80^\circ, 100^\circ, 80^\circ, 100^\circ$
3. $75^\circ, 105^\circ, 75^\circ, 105^\circ$
4. $b = 83^\circ$
5. $x = 2$, AC=10
6. $x = 5$, AO=8 BO =8
7. $x = 15^\circ$
8. 70
9. $56^\circ, 124^\circ, 56^\circ, 124^\circ$
10. 9 সেমি
11. DC = AD = 13
12. 8
15. 90°
16. $60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 120^\circ$

অনুশীলনী 5.1

1.

রঙের নাম	দাগচিহ্ন	বারংবারতা
W	卌 卌 |	11
R	卌 卌 |	11
B	卌 卌 ||||	14
Y	卌 卌	10
	মোট	46

দণ্ডলেখটি তোমরা নিজে অঙ্কন করো

2.

শ্রেণি অন্তরাল	দাগচিহ্ন	বারংবারতা
110 - 120	||||	4
120 - 130	卌 |	6
130 - 140	|||	3
140 - 150	卌 卌	10
150 - 160	|||	3
160 - 170	|	1
170 - 180	卌	5
180 - 190	|||	3
	মোট	35

3. (i) 140-150 (ii) 12 জন (iii) 130-140, 150-160 আৰু 180-190
4. (i) 4-5 ঘণ্টা (ii) 24 জন (iii) 22 জন
5.

উচ্চতা	দাগচিহ্ন	বাৰংবাৰতা
135 - 145	卌 卌 |	11
145 - 155	卌 ||	7
155 - 165	卌 |||	8
165 - 175	||	2
175 - 185	||	2
	মুঠ	30

অনুশীলনী 5.2

1. ক্রিকেট = 120^0, ফুটবল = 120^0, কাবাডি = 72^0, বেডমিণ্টন = 60^0
2. (i) 250 জন (ii) 50 (iii) চাইকেল
3.

ষষ্ঠ	60^0
সপ্তম	70^0
অষ্টম	100^0
নবম	40^0
দশম	90^0

4. (i) 30 জন (ii) গল্প, 45 জন (iii) 76 জন
5. আম = 108^0, কঁঠাল = 180^0, পেয়াৰা = 72^0

অনুশীলনী 5.3

1. (i) প্রাপ্ত ফলসমূহ a, b, c এবং d র যেকোনো একটি হতে পারে।
(ii) প্রাপ্ত ফলসমূহ এধরনের হবে।
a এবং b, a এবং c, a এবং d, b এবং c, b এবং d, c এবং d
2. হেড এবং টেইল, হেড এবং টেইল, টেইল এবং হেড, টেইল এবং টেইল।
3. (i) বেগুনি পেন্সিল পাওয়ার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{3}$, (ii) নীল পেন্সিল পাওয়ার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{4}$
4. (i) 1, 4, (ii) 3, 5, (iii) ঘটনা যার কোনো প্রাপ্ত ফল নেই, (iv) 2, 3, 5 (v) 3, 5 (vi) 2
5. (i) লাল মার্বল পাওয়ার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{2}$
(ii) নীল মার্বল পাওয়ার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{3}$
(iii) হলুদ মার্বল পাওয়ার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{6}$
(iv) নীল বা হলুদ মার্বল পাওয়ার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{2}$

অনুশীলনী 6.1

1. 14 টি   2. (i) 1   (ii) 1   (iii) 5   (iv) 0   (v) 9
3. একটি সংখ্যার এককের স্থানে 2, 3, 7 বা 8 থাকলে বর্গ সংখ্যা হতে পারে না।
(v) 0 র সংখ্যা অযুগ্ম হওয়ার জন্য
5. (i) $4^2 = 16$ (ii) $8^2 = 64$ (iii) $13^2 = 169$
6. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

অনুশীলনী 6.2

1. (i) 1225   (ii) 3025   (iii) 9025
3. 10, 24, 26

অনুশীলনী 6.3

1. (i) সত্য   (ii) সত্য   (iii) অসত্য   (iv) সত্য
2. (i) 1 বা 9   (ii) 4 বা 6   (iii) 5   (iv) 0
3. (i) 16   (ii) 27   (iii) 88   (iv) 72
(v) 110   (vi) 77   (vii) 94   (viii) 65
4. (i) 15   (ii) 5   (iii) 6   (iv) 7
5. (i) 30   (ii) 3
6. (i) 7, 24   (ii) 2, 168
7. 32, 32
8. 7 টি

অনুশীলনী 6.4

1. (i) 2 (ii) 3 (iii) 4
2. (i) 26 (ii) 29 (iii) 34 (iv) 45 (v) 52
   (vi) 67 (vii) 90 (viii) 121 (ix) 123 (x) 148
3. (i) 7.2 (ii) 8.9 (iii) 9.9
   (iv) 1.2 (v) 2.5 (vi) 31.2
4. 7 মিটার
5. 33 টি
6. (i) 5 (ii) 14 (iii) 25 (iv) 9
7. (i) 41 (ii) 6 (iii) 1 (iv) 21
8. 4624

অনুশীলনী 7.1

1. (a) পূর্ণ ঘন নয় (b) পূর্ণ ঘন হয় (c) পূর্ণ ঘন নয়
   (d) পূর্ণ ঘন হয় (e) পূর্ণ ঘন নয় (f) পূর্ণ ঘন হয়
2. (a) 5 (b) 2 (c) 10 (d) 3
3. (a) 7 (b) 2 (c) 9 (d) 100
4. (a) 2 দিয়ে ভাগ (b) 5 দিয়ে গুণ (c) 2 দিয়ে গুণ (d) 3 দিয়ে ভাগ (e) 7 দিয়ে ভাগ

অনুশীলনী 7.2

1. (i) (c) (ii) (b) (iii) (b) (iv) (b) (v) (c)
2. (i) 5 (ii) 7 (iii) 14 (iv) 22 (v) 16
   (vi) 33 (vii) 60 (viii) 21 (ix) 28 (x) 19

অনুশীলনী 8.1

1. লাভ = 10 টাকা, শতকরা লাভ = 4%
2. 69 টাকা
3. 16875 টাকা
4. 20% লোকসান
5. 5600 টাকা
6. 6% লোকসান
7. কিনা দাম = 826.32 টাকা
8. 10% লাভ
9. 1% লোকসান

অনুশীলনী 8.2

1. 1800 টাকা
2. 211.11 টাকা প্রায়
3. 10%
4. 16.7%
5. 1400 টাকা
6. 13.04%
7. 750 টাকা
8. 12.5%
9. 3000 টাকা
10. বিক্রির দাম = 336 টাকা মোট রেহাই = 44%
11. 4,73,550 টাকা
12. 30%
13. 1550 টাকা

অনুশীলনী 8.3

1. সবৃদ্ধিমূল = 318.27 টাকা মিশ্রসুদ = 18.27 টাকা
2. সবৃদ্ধিমূল = 4244.80 টাকা মিশ্রসুদ = 244.80 টাকা
3. সবৃদ্ধিমূল = 10816.00 টাকা মিশ্রসুদ = 816.00 টাকা
4. সবৃদ্ধিমূল = 7649.00 টাকা মিশ্রসুদ = 649.00 টাকা
5. সবৃদ্ধিমূল = 1815.00 টাকা মিশ্রসুদ = 315.00 টাকা
6. সবৃদ্ধিমূল = 1041.86 টাকা মিশ্রসুদ = 141.86 টাকা
7. মিশ্রসুদ = 122.41 টাকা

অনুশীলনী 8.4

1. সবৃদ্ধিমূল = 318.27 টাকা মিশ্রসুদ = 18.27 টাকা
2. সবৃদ্ধিমূল = 4244.80 টাকা মিশ্রসুদ = 244.80 টাকা
3. সবৃদ্ধিমূল = 10816.00 টাকা মিশ্রসুদ = 816.00 টাকা
4. সবৃদ্ধিমূল = 7649.00 টাকা মিশ্রসুদ = 649.00 টাকা
5. সবৃদ্ধিমূল = 1815.00 টাকা মিশ্রসুদ = 315.00 টাকা
6. সবৃদ্ধিমূল = 1041.86 টাকা মিশ্রসুদ = 141.86 টাকা
7. মিশ্রসুদ = 30.30 টাকা
8. মিশ্রসুদ = 122.41 টাকা
9. মূলধন = 4160.50 টাকা
10. সুদের হার = $4\frac{1}{6}\%$ টাকা
11. সুদের হার = 25%
12. সুদের পার্থক্য = 5 টাকা
13. মূলধন = 625 টাকা
14. সুদমূল = 5463.12 টাকা

উত্তরমালা

অনুশীলনী 8.5

1. বাট্টার পরিমাণ = 12,000 টাকা, বিক্রিমূল্য = 48,000 টাকা, সি জি এস টি = 0, এস জি এস টি = 0, আই জি এস টি = 48,000 র 28% = 13,440 টাকা ও বিলের পরিমাণ = 61,440 টাকা
2. বিক্রি মূল্য =63,000 টাকা, এস জি এস টি 5670 টাকা, সি জি এস টি 5670 টাকা, আই জি এস টি 0, বিলের পরিমাণ = 74,340 টাকা।
3.

সামগ্রী	সামগ্রীর সংখ্যা	সর্বোচ্চ খুচরো মূল্য (MRP)	মোট (MRP)	রেহাই	রেহাইর পরিমাণ	বিক্রি মূল্য	সি জি এস টি 2.5%	এস জি এস টি 2.5%
A	12	50	600	10%	60	540	13.50	13.50
B	30	60	1800	15%	270	1530	38.25	38.25
C	10	35	350	12%	42	308	7.70	7.70
D	6	15	90	10%	9	81	2.025	2.025
						2459	61.475	61.475

বিলের পরিমাণ = বিক্রি মূল্য + সি জি এস টি + এস জি এস টি

= 2459 + 61.475 + 61.475 = 2581.95 টাকা = 2582 টাকা

অনুশীলনী 9.1

1. (i) $22x^3y^3$ (ii) $45a^3x^2$

(iii) $-45p^4q^6$ (iv) $15x^3 + 24x$

(v) $12y^3 - \frac{2}{3}y^2$ (vi) $-8a^4 - 24a^3b - 16a^3c$

(vii) $-6m^3n^2 + 4m^2n^2$ (viii) $99x^3 + 44x^2 + 33x$

(ix) $21b^4 - 7ab^3 - 140a^2b^2$ (x) $3x^4y^3 + 3x^4y^5 - 6x^3y^2$

2. (i) $3x^4y + 2x^2y^2 - y^3$ (ii) $14x^2 + 45xy - 14y^2$

(iii) $\frac{1}{4}a^5 + \frac{1}{6}a^2b^2 + 3a^3b + 2b^3$

(iv) $3.75x^2 - 8.5xy + 3.75y^2$

(v) $6x^3 + 11x^2y + 4xy^2 + 12y^2 + 9xy$

(vi) $2x^6y^5 - 2x^4y^3 + 2x^2y^2 + 5x^7y^4 - 5x^5y^2 + 5x^3y$

(vii) $3a^5b^5 + 6a^6b^5c^3 - 22a^3b^3c - 8a^4b^3c^4 + 24abc^2$

(viii) $12x^5y^2 - 15x^4y^3 + 9x^4y^2 - 8x^2y + 10xy^2 - 6xy$

(ix) $10x^2 + 6y^2 + 19xy + 2yz + 5zx + 2x + 3y + z$

(x) $9x^6 - 4y^4 + 4y^2z - z^2$

3. (i) $15x^2 + 14x$ (ii) $-4m^2n - 6m^3n$

(iii) $24a + 32b + 5$ (iv) $8x^3 + x^2 - 9x$

4. (i) $-p^2 + q^4 + 15$ (ii) $a^3 + 2b^3$

(iii) $y^5 + 5xy^2 + y^3$ (iv) $17\frac{1}{64}$

(v) $2y^4 - 2y^2 - 2y - 1$ (vi) $3l^2 - 6.01lm + 1.5l - 0.5m^2 + 4m$

অনুশীলনী 9.2

1. (i) $x^2 + 12x + 35$ (ii) $49x^2 + 56xy + 12y^2$

(iii) $16x^6 + 72x^3 + 80$ (iv) $16k^4 - 40k^3 + 21k^2$

(v) $\frac{a^2}{4} + \frac{a}{8} - \frac{1}{8}$ (vi) $\frac{n^4}{25} + \frac{n^2}{5} - 0.96$ $\frac{n^4}{25} + \frac{n^2}{5} - 0.96$

(vii) 9506 (viii) 252003

2. (i) $x^2 + 10x + 25$ (ii) $25x^2 + 40xy + 16y^2$

(iii) $9a^6 + 24x^5 + 16a^4$ (iv) $9x^2 + \frac{1}{9x^2} + 2$

(v) $\frac{p^2}{q^2} + \frac{q^2}{p^2} + 2$ (vi) 252004

(vii) 90.25 (viii) $17\frac{1}{64}$

3. (i) $x^2 - 14x + 49$ (ii) $36x^2 - 60x + 25$

(iii) $100x^4 - 60x^2y + 9y^2$ (iv) $p^4 - 2p^2q^2 + q^4$

(v) $a^4x^2 - 2a^3x^3 + a^2x^4$ (vi) $x^4 + \frac{1}{x^4} - 2$

(vii) 87616 (viii) 3996001

4. (i) $y^2 - 121$ (ii) $4x^2 - 9$

(iii) $m^4 - 36$ (iv) $a^2x^4 - b^2y^2$

(v) $1 - x^{2m}$ (vi) 3599

(vii) 9964 (viii) 80.75

উত্তরমালা

5. (i) $9x^2 - 30xm + 25m^2$ (ii) $16m^2 + 20m + 6$
(iii) $16n^2 + 72n + 81$ (iv) $36x^2 + 20x + 1$
(v) $16a^2b^2 - c^2$ (vi) $\frac{x^2}{4}$
(vii) $\frac{a^4}{4}+\frac{a^2b^2}{4}+\frac{b^4}{16}$ (viii) $0.25x^4 - 0.2x^2y^2 + 0.04y^4$
(ix) $y^6 - 81x^4$ (x) $\frac{y^4}{4}+y^2-24$
(xi) $49x^4 + \frac{14}{3}x^2+\frac{1}{9}$ (xii) $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy$
(xiii) 1000998 (xiv) 104.04
(xv) 6241 (xvi) 35.96

6. (i) $2x^2 + 3 + \frac{1}{x^2}$ (ii) $8lm$
(iii) $a^4b^2 - 4a^3b^3 + a^2b^4$ (iv) 0
(v) $-100ab$ (vi) $20p^4 - 20p^2q^2$
(vii) $3x^2 + 10$ (viii) $\frac{28}{9}x^2+3xy$
(ix) $\frac{4x^2}{25}$ (x) 9
(xi) 3 (xii) 8

8. (i) $(x^2 + 13x + 40)$ বৰ্গ মিটাৰ
(ii) $(4x^2 + x + \frac{1}{16})$ বৰ্গ মিটাৰ
(iii) $(10x + 25)$ বৰ্গ মিটাৰ
(iv) 49755 টকা
(v) 89559 বৰ্গ মিটাৰ
(vi) 7, 47
(vii) 6, 34
(viii) 12

অনুশীলনী 10.1

(*a*) (i) সম্মুখের দৃশ্য (ii) পার্শ্ব দৃশ্য (iii) ওপরের দৃশ্য

(*b*) (i) সম্মুখের দৃশ্য (ii) পার্শ্ব দৃশ্য (iii) ওপরের দৃশ্য

(*c*) (i) ওপরের দৃশ্য (ii) পার্শ্ব দৃশ্য (iii) সম্মুখের দৃশ্য

(*d*) (i) ওপরের দৃশ্য (ii) পার্শ্ব দৃশ্য (iii) সম্মুখের দৃশ্য

(*e*) (i) সম্মুখের দৃশ্য (ii) ওপরের দৃশ্য (iii) পার্শ্ব দৃশ্য

(*f*) (i) সম্পূর্ণ সাদাটির দৃশ্য (ii) ওপরের দৃশ্য (iii) সম্মুখের দৃশ্য

(*g*) (i) সম্পূর্ণ বাড়িটির দৃশ্য (ii) পার্শ্ব দৃশ্য (iii) সম্মুখের দৃশ্য (iv) ওপরের দৃশ্য

(*h*) (i) সম্পূর্ণ ডাস্টবিনের দৃশ্য (ii) ওপরের দৃশ্য

অনুশীলনী 10.2

1. 30
2. 8

অনুশীলনী 11.1

1.(a) 36 বর্গ সেমি 1.(b) 130 বর্গ সেমি 2. 7 সেমি 3. 195 বর্গ মি

4. 70 বর্গ সেমি 5. 20 সেমি 6. 72 বর্গ সেমি 7. 6.2 সেমি

8. 44 মি 9. 51 বর্গ সেমি 10. 4 সেমি 11. 1300 বর্গ চেমি 12. (a) 49 বর্গ সেমি

12.(b) 101 বর্গ চেমি 12.(c) 462 বর্গ চেমি 12.(d) 91.5 বর্গ সেমি 12.(e) 770 বর্গ সেমি

13. 24 বর্গ সেমি 14. 120 বর্গ সেমি 15. 6 সেমি 16. 10 সেমি এবং 20 সেমি

অনুশীলনী 11.2

1. 4374 বর্গ সেমি 2. 90 বর্গ মি 3. 10 বর্গ মি 4. 144 মি

5. 1188 টাকা 6. 240 বর্গ সেমি 7. 350 বর্গ সেমি 8. 1 সেমি

9. 1408 টাকা 10. 302.5 বর্গ সেমি 11. 3696 টাকা

অনুশীলনী 11.3

1. 2 মিটার 2. 10 সেমি 3. 5 সেমি 4. 450 টা

5. 594 ঘন মিটার 6. $22\frac{1}{2}$ ঘণ্টা বা 22 ঘণ্টা 30 মিনিট 7. 11200 সেমি বা 112 মিটার

8. 5 সেমি 9. 6 মিটার 10. 12000 লিটার 11. 34650 ঘন সেমি

12. 2 : 1 13. 22680 লিটার 14. ব্যাসার্ধ = 7 সেমি, আয়তন = 2156 ঘন সেমি

অনুশীলনী 12.1

1. (i) $\frac{1}{125}$ (ii) $\frac{1}{16}$ (iii) $\frac{1}{-64}$ (iv) $-\frac{3125}{16807}$ (v) $-\frac{16807}{3125}$ (vi) $\frac{1}{6561}$

2. (i) $\left(\frac{7}{5}\right)^3$ (ii) $\frac{1}{2^5 \times 3^2}$ (iii) $\left(-\frac{3}{7}\right)^3$

   (iv) $\left(-\frac{5}{6}\right)^3$ (v) $-\frac{3^3}{2^4 \times 7^2}$ (vi) $\frac{2^7}{3^4}$

3. (i) 3^4 (ii) $-\frac{1}{2^5 \times 3}$ (iii) $\frac{1}{5^0}$ (iv) $\frac{1}{3^5 \times 2^5}$

4. (i) $-\frac{49}{30375}$ (ii) 54 (iii) 40

   (iv) 1 (v) $\frac{1}{60}$ (vi) 729

5. (i) 3^{-4} (ii) $\left(\frac{3}{2}\right)^6$ (iii) $\left(-\frac{9}{4}\right)^5$

   (iv) $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ (v) $\left(-\frac{2}{3}\right)^7$ (vi) $\left(\frac{3}{8}\right)^4$

6. (i) $\left(-\frac{4}{5}\right)^6$ (ii) $\left(\frac{3}{5}\right)^5$ (iii) $\left(-\frac{5}{3}\right)$

   (iv) $\left(\frac{2}{3}\right)^{24}$ (v) $\frac{1}{3^8}$

7. (i) 1 (ii) 2 (iii) 10 (iv) 2

8. (i) $3^3 \times 5^5$ (ii) 3^{10k-4} (iii) 5^5 (iv) $\frac{5^4 \times l^4}{2}$ (v) 1

9. (i) $1 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3}$

   (ii) $3 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2}$

উত্তৰমালা

অনুশীলনী 12.2

1. (i) 3.57×10^7 (ii) 7.0503×10^8 (iii) 3.78×10^4
   (iv) 5.3628×10^9 (v) 4.0032×10^8
2. (i) 3.82×10^{-8} (ii) 9.057×10^{-8} (iii) 7.56×10^{-6}
   (iv) 2.3×10^{-6} (v) 3.14×10^{-7}
3. (i) 702000 (ii) 39720000 (iii) 100100000
   (iv) 0.00000003 (v) 0.0000021 (vi) 0.0000309
4. (i) 3×10^5 কিমি (ii) 1.4335×10^{12} মি (iii) 6.023×10^{23}
   (iv) 1.5×10^{-8} সেমি (v) 5×10^{-7} মি (vi) 3.2×10^{-6} মি
   (vii) 1×10^{-6} মি
5. (i) $8.75 \times 10^5 < 8.75 \times 10^7 < 9.25 \times 10^6 < 9.42 \times 10^6$
6. (i) 3.542×10^{11} (ii) 6.633×10^8
7. (i) 6.4385×10^8 (ii) 3.7224×10^7

অনুশীলনী 13.1

1. (i) হয় (ii) নয় (iii) নয়
2.

সময়ের মেয়াদ	1 বছর	2 বছর	3 বছর
সরল সুদ	80	160	240
চক্রবৃদ্ধি সুদ	80	166.40	259.71

সরল সুদ সময়ের সঙ্গে প্রত্যক্ষ সমানুপাতিক।

3. (i) 45 কি মি (ii) 75 কি মি (iii) 20 কি মি
4. 162.5 কি মি
5. 1190 কি মি
6. মেরি
7. 700 বোতল
8. 21 সেমি
9. (i) 6 মি (ii) 8 মি 75 সেমি
10. 4 সেমি।

অনুশীলনী 13.2

1. (i) হ্যাঁ (ii) হ্যাঁ (iii) হ্যাঁ (iv) না
2. 5 দিন 3. (i) 72 দিন (ii) 20 দিন (iii) 15 দিন
4. 1 ঘণ্টা 36 মিনিট 5. 168 জন 6. 36 দিন 7. 200 দিন
8. (i) 14 দিন (ii) 14 জন মানুষ

বহুবিকল্প প্রশ্ন (MCQ)

1. (a) 2. (b) 3. (c) 4. (c) 5. (b) 6. (a) 7. (c) 8. (d)

অনুশীলনী 14.1

1. (i) $xy(3x + 5)$ (ii) $5xy(2x - y)$ (iii) $7abc(a - 3b + 2)$
2. (i) $(a + b)(a + 6)$ (ii) $(a + b)(a + c)$ (iii) $(1 - x)(1 + x^2)$
   (iv) $(a + 1)(b + 1)$ (v) $(a - b)(4x + 3y)$
3. (i) $(x + 6)(x - 6)$ (ii) $(3x + 5)(3x + 5)$ (iii) $(4a - 11)(4a + 11)$
   (iv) $11(x + 2)(x + 2)$ (v) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$
   (vi) $(2 + x - y)(2 - x + y)$ (vii) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$
   (viii) $(a - b)(a - b)(a + b)$
4. (i) $(x + 4)(x + 4)$ (ii) $(x + 5)(3 - x)$ (iii) $(x - 2)(x + 10)$
   (iv) $(x - 1)(x + 3)$ (v) $(a - 6)(a + 2)$ (vi) $(x - 8)(x - 13)$
   (vii) $2(x + 4)(x + 5)$ (viii) $(l - 6)(l - 7)$ (ix) $(4 - a)(a + 5)$
5. (i) $(x + 2)(3x + 2)$ (ii) $(m + 3)(2m + 1)$ (iii) $(p + 4)(2p - 7)$
   (iv) $(3a - 1)(3a + 8)$ (v) $(4y - 3)(y + 7)$ (vi) $3m^2(m^2 - 5n)(m^2 + 3n)$
   (vii) $(1 - 3x)(2x + 1)$ (viii) $(2a + 3b)(3a - b)$
6. (i) $(3x + 4)(3x + 1)$ (ii) $(3y - 2)(4y - 3)$ (iii) $(3m - 5)(2m + 3)$

অনুশীলনী 14.2

1. (i) x^3 (ii) $2p^2$ (iii) $-\frac{9m^2}{n}$

   (iv) $\frac{4}{3}pqr^3$ (v) $\frac{-12a^4}{17b^2}$

2. (i) $5y-3$ (ii) $\frac{5}{2}a^4-2a^2+\frac{3}{2}$ (iii) $qr^2-2+3pqr^2$

   (iv) $x^2-\frac{bx}{a}-\frac{c}{a}$ (v) n^3-m^3

3. (i) 3 (ii) $20\,m$ (iii) $\frac{14pq}{11}$

   (iv) $1092xyz$

4. (i) $x-5$ (ii) 4 (iii) $9(p-1)$

   (iv) $\frac{p+q}{2}$ (v) $-(x+3)(x^2+9)$ (vi) $x+7$

   (vii) $m+9$ (viii) $4y-3$ (ix) $4u+21$

   (x) $4y(5y-7)$

5. (i) $\frac{9x^2}{9x^2}=1$ (ii) $\frac{3x+2}{3x}$ (iii) $\frac{4x^2+1}{4x^2}$

   $=\frac{3x}{3x}+\frac{2}{3x}$ $=\frac{4x^2}{4x^2}+\frac{1}{4x^2}$

   $=1+\frac{2}{3x}$ $=1+\frac{1}{4x^2}$

   (iv) $\frac{7x+5}{5}$ (v) $\frac{4x^2+8x+4}{4}$

   $=\frac{7x}{5}+\frac{5}{5}$ $=\frac{4x^2}{4}+\frac{8x}{4}+\frac{4}{4}$

   $=\frac{7x}{5}+1$ $=x^2+2x+1$

অনুশীলনী 15.1

1. (i) X অক্ষ সময় এবং Y অক্ষ অতিক্রম করা দূরত্বের নির্দেশ করছে।
   (ii) 8 ঘণ্টায় 375 কি মি (iii) দুপুর 12 টা থেকে 1 PM র ভিতর
   (iv) থেমেছিল, 1 ঘণ্টা (v) 7 AM র থেকে 11 AM এবং 1 PM থেকে 2 PM
2. (i) এক গৃহস্থের গত ছমাহের বিদ্যুতের বিল (ii) বিদ্যুতের ইউনিট
   (iii) জুন মাসে (iv) সেপ্টেম্বর মাস (v) এপ্রিল এবং আগস্ট মাস।
3. (i) 7 টি (ii) ফুটবল (iii) বেডমিণ্টন
   (iv) কাবাডি ও লাফ (10 জন), দৌড় ও সংগীত চেয়ার (15 জন)
4. (i) সাতবারের নাম (ii) শনিবার (iii) বৃহস্পতিবার (iv) 60 টি

অনুশীলনী 15.2

1. (i) ভুজ = 0, কোটি = 4 (ii) ভুজ = 5, কোটি = 9
   (iii) ভুজ = 5, কোটি = 0 (iv) ভুজ = 7, কোটি = 7
2. (i) X অক্ষ (ii) Y অক্ষ
   (iii) X অক্ষ (iv) Y অক্ষ
4. (i) X অক্ষ (8, 0) এবং Y অক্ষ (0, 8)
5. A (1, 1), B (4, 1), C (4, 3), D (1, 3),
   E (6, 1), F (9, 1), G (9, 4), H (6, 4),
   L (8, 5), M (12, 5), N (10, 8), P (1, 6),
   Q (5, 6), S (3, 8)
6. (i) অশুদ্ধ, (5, 0) বিন্দুটি X অক্ষে থাকবে (ii) শুদ্ধ (iii) শুদ্ধ

অনুশীলনী15.3

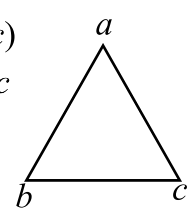
1. (b) (i) 6 ঘণ্টা (ii) 250 কিমি (c) (i) 40 টাকা (ii) 1200 টাকা

অনুশীলনী 16.1

1. (ii) 5 (iii) 2 (iv) 3 (v) 2, 3, 9 (vi) 2, 3
2. (i) 4, 6 (ii) 11 (iii) 4, 6, 8 (iv) 11 (v) 4
3. (ii) 7 (iii) 13 4. (i) 2, 5, 8 (ii) 8 5. 2

অনুশীলনী 16.2

1. কৌশলটি = $a(b + c)$
2. কৌশলটি = $(a - b)c$
3. কৌশলটি = $\frac{abc}{10}$



অনুশীলনী 16.3

1. (i) A = 5, B = 1 (ii) A = 5 (iii) A = 4, B = 6
   (iv) A = 7, B = 3 (v) A=2, B=5, C=9 (vi) A=5, B=6, C=1
   (vii) A=5, B=0, C=1 (viii) A = 5, B = 2 (ix) A=9, B=8, C=5
   (x) A = 7, B = 4 (xi) A=5, B=0, C=2 (xii) A=2, B=5, C=6

❑❑❑

পাঠ্যপুস্তক প্রস্তুতকরণে জড়িত ব্যক্তিগণ

পাঠ প্রস্তুতকরণ ঃ

ড° রাম চন্দ্র ডেকা	– অবসরপ্রাপ্ত অধ্যাপক , বিভাগীয় প্রধান, গণিত বিভাগ, প্রাগজ্যোতিষ মহাবিদ্যালয়
ড° প্রবীণ দাস	– অবসরপ্রাপ্ত সহযোগী অধ্যাপক, গণিত বিভাগ, আর্য বিদ্যাপীঠ মহাবিদ্যালয়
ড° দিব্যজ্যোতি মহন্ত	– ডিন, অধ্যয়ন কেন্দ্র, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়
বিপুল খাউন্ড	– অবসরপ্রাপ্ত বরিষ্ঠ প্রবক্তা, জেলা শিক্ষা ও প্রশিক্ষণ প্রতিষ্ঠান, শোণিতপুর
ড° রীতা দেবী	– বরিষ্ঠ প্রবক্তা, জেলা শিক্ষা ও প্রশিক্ষণ প্রতিষ্ঠান, কামরূপ
ড° জ্ঞানজ্যোতি শর্মা	– সহযোগী অধ্যাপক, রাধা গোবিন্দ বরুয়া মহাবিদ্যালয়
মনোজ কুমার শর্মা	– সহকারী অধ্যাপক, গুয়াহাটি মহাবিদ্যালয়
বীরব্রত দাস চৌধুরী	– প্রবক্তা, বঙাইগাঁও অভিযান্ত্রিক প্রতিষ্ঠান
মীনাক্ষী বুঢ়াগোহাঁই	– প্রবক্তা, শিক্ষক শিক্ষণ মহাবিদ্যালয়, গোলাঘাট
মুকেশ শর্মা	– উপ-সঞ্চালক, রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পরিষদ, অসম
কাকলি পেগু	– প্রবক্তা, জেলা শিক্ষা ও প্রশিক্ষণ প্রতিষ্ঠান, ধেমাজি
রাণু বরগোহাঁই	– অবসরপ্রাপ্ত শিক্ষয়িত্রী, টি সি সরকারি উঃ মাঃ বহুমুখী বালিকা বিদ্যালয়, গুয়াহাটি
প্রতুল কুমার শর্মা	– প্রধান শিক্ষক (ভারপ্রাপ্ত), লালসিং একাডেমি হাইস্কুল, গুয়াহাটি
খনীন্দ্র বর্মন	– শিক্ষক, বেতকুছি উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, গুয়াহাটি
কাকলি বরঠাকুর	– শিক্ষয়িত্রী, তরাজান উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, যোরহাট
তিলক কুমার মহন্ত	– শিক্ষক, নারায়ণপুর বালিকা মধ্য বিদ্যালয়, লখিমপুর

X8E9P1

বিষয় বিশেষজ্ঞ ঃ

ড° রাম চন্দ্র ডেকা	– অবসরপ্রাপ্ত অধ্যাপক , বিভাগীয় প্রধান, প্রাগজ্যোতিষ মহাবিদ্যালয়
ড° প্রবীণ দাস	– অবসরপ্রাপ্ত সহযোগী অধ্যাপক, আর্য বিদ্যাপীঠ মহাবিদ্যালয়
বিপুল খাউন্ড	– অবসরপ্রাপ্ত বরিষ্ঠ প্রবক্তা, জেলা শিক্ষা ও প্রশিক্ষণ প্রতিষ্ঠান, শোণিতপুর
আরতী ভট্টাচার্য	– অবসরপ্রাপ্ত শিক্ষা আধিকারিক, অসম মাধ্যমিক শিক্ষা পরিষদ
ড° জ্ঞানজ্যোতি শর্মা	– সহযোগী অধ্যাপক, রাধা গোবিন্দ বরুয়া মহাবিদ্যালয়

পুনরীক্ষক ঃ

ড° তারকেশ্বর চৌধুরী	– অবসরপ্রাপ্ত অধ্যাপক , বিভাগীয় প্রধান, গণিত বিভাগ, কটন মহাবিদ্যালয়
ড° রাম চন্দ্র ডেকা	– অবসরপ্রাপ্ত অধ্যাপক বিভাগীয় প্রধান, প্রাগজ্যোতিষ মহাবিদ্যালয়
ড° প্রবীণ দাস	– অবসরপ্রাপ্ত সহযোগী অধ্যাপক, আর্য বিদ্যাপীঠ মহাবিদ্যালয়

পাঠ অনুবাদক ও পুনরীক্ষক ঃ

ড° মিতা চক্রবর্তী	– সহযোগী অধ্যাপক, কটন বিশ্ববিদ্যালয়
ড° বরুণ কুমার সাহা,	– সহকারী অধ্যাপক, গুয়াহাটি বিশ্ববিদ্যালয়

সমন্বয়ক ঃ

মুকেশ শর্মা	– উপ সঞ্চালক, রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পরিষদ, অসম
রূপক কুমার ভট্টাচার্য	– সহকারী সঞ্চালক, রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পরিষদ, অসম

ইংরাজী শব্দের অন্তর্ভুক্তকরণ

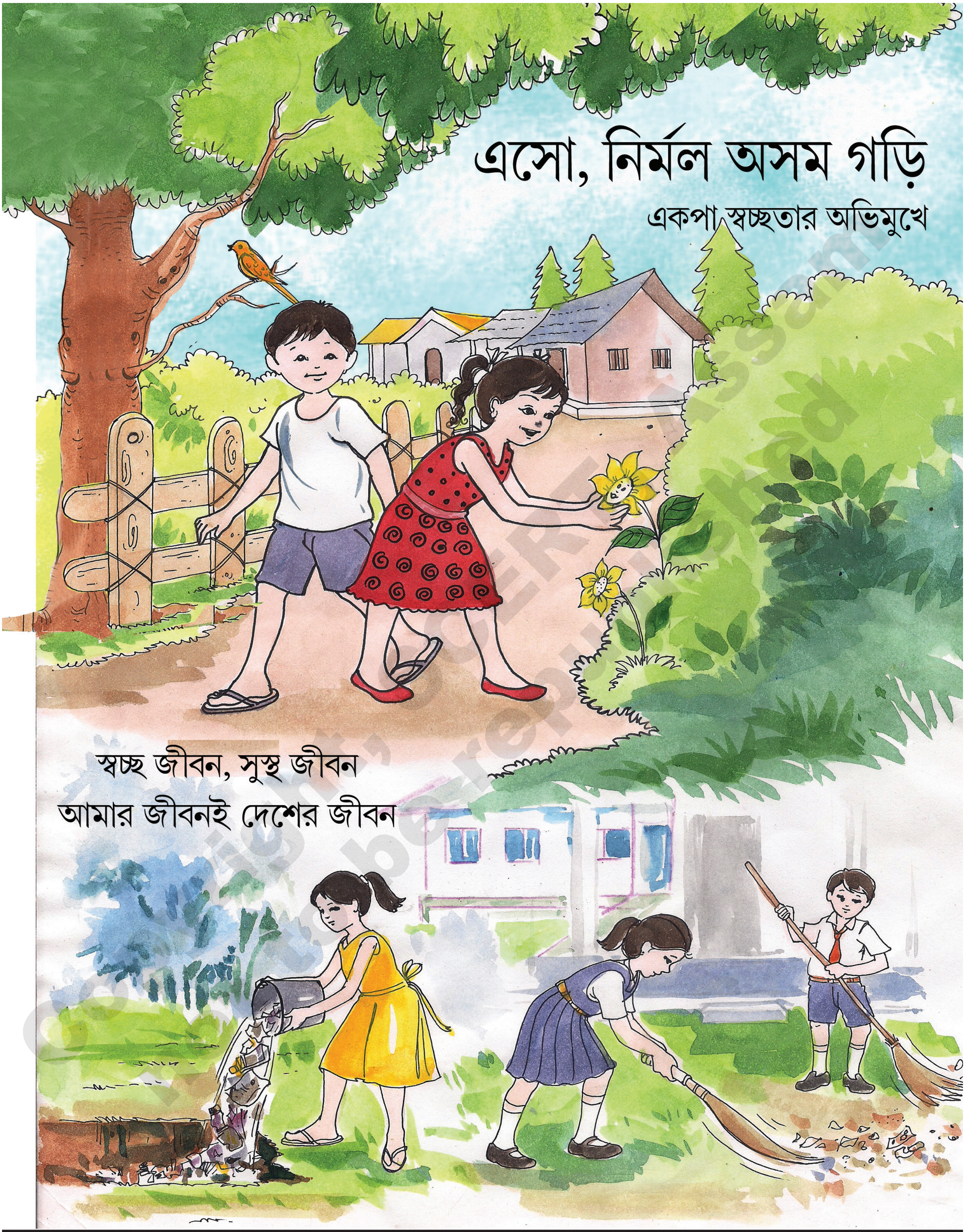
বাসব বিজয় দাস - সহকারি শিক্ষক, কাহিলিপাড়া হাইস্কুল, কাহিলিপাড়া, গুয়াহাটি

প্রচ্ছদ ও অলংকরণ ঃ

শংকর কলিতা

ডিটিপি ঃ

বিজয় কাকতি, উৎসব তালুকদার, হৃদিকেশ দাস, বুদ্ধজ্যোতি বরুৱা, প্রাঞ্জল তালুকদার



ফেলে দেওয়া জিনিস ডাস্টবিন বা গর্তে ফেলতে হয়। ঘর বা স্কুল পরিষ্কার-পরিচ্ছন্ন করে রাখার সঙ্গে সংলগ্ন পরিবেশ এবং চৌপাশ পরিষ্কার রাখাও প্রয়োজন।